

Mathematik für Physik und Computational Science, 25. Übung

WS 2016/17

<https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15>

1. Die Funktion $u(x, y, z)$ sei in Kugelkoordinaten umgerechnet, d. h.

$$U(r, \theta, \varphi) = u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Bestätigen Sie die Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

2. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100 °C erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20 °C bis auf 25 °C ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf 60 °C abkühlt? (Hinweis: die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz.)
3. Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7 °C-Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewusste Alamagunther auf der patriotischen Temperatur von 19 °C hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, misst Alamagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Temperatur desselben auf 15 °C fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schließt er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19 °C) etwa drei Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muss, um es auf annehmbare 8 °C zu bringen. Hat er recht?
4. **(HA)** Bestimme die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?
5. Ein Tank enthält 1000 Liter Wasser, in dem anfänglich 50 Kilogramm eines Salzes gelöst seien. Pro Minute mögen zwei Liter der Salzlösung aus dem Tank auslaufen und 2 Liter reinen Wassers zulaufen, die sich sofort und vollständig mit der vorhandenen Salzlösung vermischen. Wieviel Kilogramm Salz sind t Minuten nach Beginn des Auslaufens noch im Tank vorhanden?
6. **(HA)** Bestimme das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_0 vorhanden ist. (Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1 600 Jahre.)
7. **(HA)** Bestimmen Sie alle Lösungen $y = y(x)$ folgender Differentialgleichungen:
(a) $y' = -\frac{x}{y}$ (b) $y' = \frac{x}{x^2-1}$ (c) $2xy^2 + (x^2 - 1)y' = 0$.

Welche Lösung von (a), (b) und (c) erfüllt die Bedingung $y(0) = 1$? Skizzieren Sie für diese Lösungen den Graphen in der xy -Ebene!