Mathematik für Physik und Computational Science, 24. Übung

WS 2016/17 https://www.tu-chemnitz.de/∼lahol/lehre/phcsb15

---

1. Zeige mithilfe des Satzes von Stokes, dass das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma (yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z)$$

vom Weg unabhängig ist.

2. Zeigen Sie, dass jedes bezüglich eines Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ zentralsymmetrische Vektorfeld der Gestalt

$$v(x) = f(\|x-p\|)(x-p)$$

mit einer stetigen Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ein Potential in $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ besitzt.

3. Berechne

$$\oint_\Gamma [x(z-y)\mathrm{d}x + y(x-z)\mathrm{d}y + z(y-x)\mathrm{d}z],$$

wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ (durchlaufen von A über B nach C zurück nach A)

(a) unter Benutzung einer Parameterdarstellung des Integrationsweges,

(b) unter Verwendung des Satzes von Stokes

4. **(HA)** Berechne $\int_S \vec{v}\mathrm{d}\vec{S}$, wenn S die Oberfläche des gesamten Zylinders $x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le h$ und $v(\vec{r}) = \vec{r}$ ist (Normale nach außen).

(a) mit Gauß, (b) ohne Gauß

5. **(HA)** Überprüfen Sie die Richtigkeit des Satzes von Stokes für die Fläche

$$\{z = x^2 - y^2 : x^2 + y^2 \le a^2\}$$

und die zugehörige Randkurve $\{z = x^2 - y^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ sowie das Vektorfeld $v(\vec{r}) = \vec{r}$!

6. Leiten Sie die Sektorformel nach Leibniz

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\mathrm{d}t$$

aus einem bekannten Integralsatz her. Sie gibt den Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ in Parameterdarstellung und dem Nullpunkt an.