Mathematik für Physik und Computational Science, 21. Übung

1. Zeige

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0,$$

wenn $f(x)$ stetig und C stückweise glatt und geschlossen ist.

2. Die Vektorfelder F, G und das Skalarfeld φ seien auf einer offenen Teilmenge M des $\mathbb{R}^3$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass auf M gilt:

   (a) $\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F$,

   (b) $\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F$,

   (c) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$.

3. Sei

$$v(\vec{r}) = (x^2 + xy,\ \frac{x^2}{2} + y + az,\ by).$$

Bestimme b als Funktion von a so, dass v ein Gradientenfeld ist und berechne dann eine Stammfunktion (Potentialfunktion) φ von v!

4. Sei $f \in BV[a, b]$. Zeigen Sie, dass sich f dann als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen lässt.