Mathematik für Physik und Computational Science, 20. Übung

---

1. Berechnen Sie die Länge
   (a) der Astroide ($x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$),
   (b) der Kardioide ($r = a(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$).

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen zu $BV[0,1]$ gehören.
   (a) $f(t) = \begin{cases} t\sin\dfrac{\pi}{2t} & : t > 0 \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$
   (b) $f(t) = \begin{cases} t^2\sin\dfrac{\pi}{2t} & : t > 0 \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$

3. **(HA)** Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:
   (a) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s, \qquad \Gamma : \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\},$
   (b) $\int_\Gamma \sin 2x\mathrm{d}s, \qquad \Gamma$: Kosinuskurve von $x = 0$ bis $x = t$,
   (c) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s, \qquad \Gamma$ gegeben durch $x = t,\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\ z = \frac{1}{2}t^2,\ 0 \le t \le 1.$

4. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale 2. Art
   (a) $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ mit $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ positiv orientiert,
   (b) $\int_\Gamma (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$ mit Γ Streckenzug von $(0,0)$ über $(1,0)$ nach $(1,1)$.

5. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals $I = \int_\Gamma (2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$ über einen Weg Γ, der die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ durch
   (a) die Gerade $y = x$,
   (b) die Parabel $y = x^2$,
   (c) die Parabel $y^2 = x$,
   (d) die kubische Parabel $y = x^3$

   verbindet!

6. **(HA)** Man berechne $I = \int_\Gamma xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$ über die Integrationswege (a) - (d) aus Aufgabe 4.

7. Berechnen Sie
   $$\int_\Gamma [(y+3z)\mathrm{d}x + (2z+x)\mathrm{d}y + (3x+2y)\mathrm{d}z],$$
   wenn Γ gegeben ist durch $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{2a\varphi}{\pi}$ von $(a,0,0)$ bis $(0,a,a)$.

8. Berechnen Sie
   $$\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2+1}$$
   mit Γ Rand des kleinen Segments, das durch $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ definiert und im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

9. **(HA)** Unter Wirkung des Kraftfeldes $f(x,y) := \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ bewege sich ein Massepunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

19. Hausaufgabe

Abgabetermin: 27.10.2016

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 20. Übung.