Mathematik für Physik und Computational Science, 16. Übung

SS 2016 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Welche Richtungsableitungen existieren von $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ im Punkt $(0,0)$?

2. Es sei $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & :(x,y)\neq(0,0),\\ 0 & :(x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Man zeige:

   (a) Im Punkt $(0,0)$ existieren alle Richtungsableitungen von f.

   (b) f ist nicht stetig im Punkt $(0,0)$.

3. Seien $\Omega=\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<r,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ z\in\mathbb{R}\}$ und

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\},\quad (r,\varphi,z)\mapsto(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

   Man bestimme die Ableitung dieser Funktion und deren Determinante.

4. Es sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Es existieren Zahlen $c>0$ und $\alpha>1$, sodass für alle x in einer Umgebung von $0\in\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $|f(x)|\leq c\|x\|^\alpha$ gilt.

   Man zeige: f ist in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0)=0$.

5. Berechnen Sie die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung von

   (a) $f(x,y)=x^{(y^2)}$, (b) $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$.

6. Es sei $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0),\\ 0 & :(x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

16. Hausaufgabe

Abgabetermin: 01.07.2016

---

1. Berechnen Sie die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung von

   (a) $f(x,y)=\arccos\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, (b) $f(x,y,z)=\dfrac{x\mathrm{e}^y}{z}$.

2. Man bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\},\quad (r,\varphi,\theta)\mapsto(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\sin\theta),$$

   wobei $\Omega=\{(r,\varphi,\theta) : 0<r,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi\}$.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zeigen Sie, dass für $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$