Mathematik für Physik und Computational Science, 15. Übung

SS 2016 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Man zeige, dass $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ existieren, $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ aber nicht:

   (a) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ (b) **(HA)** $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2}$.

2. Man zeige, dass für $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)\sin\dfrac{1}{x_1}\sin\dfrac{1}{x_2}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ nicht existieren, aber $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)=0$ gilt.

3. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie für $x,y,z,u,v\in X$

   (a) $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y)$ (b) $|d(x,y)-d(u,v)|\le d(x,u)+d(y,v)$.

4. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie

   (a) Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen sind offen.

   (b) **(HA)** Für abgeschlossene und disjunkte Mengen A und B existieren stets auch offene und disjunkte Mengen U und V mit $A\subset U$ und $B\subset V$.

   (c) **(HA)** Der Abstand zweier abgeschlossener disjunkter Mengen kann Null sein. (Man gebe ein Beispiel an.)

   (d) Es ist $\operatorname{dist}(A,K):=\inf\limits_{x\in A,\ y\in K} d(x,y)>0$, falls A abgeschlossen, K kompakt und $A\cap K=\emptyset$.

   (e) Für jede Menge $M\neq\emptyset$ und jedes $\varepsilon>0$ ist die Menge $U:=\{x\in X:\operatorname{dist}(x,M)<\varepsilon\}$ offen.

5. Auf $\mathbb{R}^n$ seien die Normen $\|\cdot\|,\ \|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_\infty$ definiert durch

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2},\qquad \|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,\qquad \|x\|_\infty=\max_{k=1,\dots,n}|x_k|.$$

   Zeigen Sie, dass für alle $x\in\mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|\sim\|x\|_1\sim\|x\|_\infty$. Welche Konsequenz hat das für die Konvergenz auf $\mathbb{R}^n$?

15. Hausaufgabe

Abgabetermin: 24.06.2016

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 15. Übung.

2. Zeigen Sie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1$.

3. Für die durch $z=f(x,y)$ gegebenen Funktionen zeichne man die Projektionen einiger Höhenlinien in die xy-Ebene.

   (a) $z=\frac{xy}{x^2+1}$ (b) $z=\mathrm{e}^{\frac{x-y}{y}},\ y\neq 0$ (c) $z=\frac{x^2+y^2}{2y},\ y\neq 0$.