Mathematik für Physik und Computational Science, 11. Übung

1. Berechnen Sie die Determinante folgender reeller $n \times n$-Matrizen!

(a) $A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$, (b) $S_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\operatorname{tridiag}(1,-2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, (d) $V(\lambda_{i-1})_{i=1}^n = \left[\lambda_i^j\right]_{i,j=0}^{n-1}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1\ \cdots\ 1]$ **(Z)** $A(a_i)_1^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1\ \cdots\ 1] + \operatorname{diag}(a_i)_1^n$.

2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n = \mathbf{e}^{2\pi \mathbf{i}/n}$. Wir betrachten die Matrix der diskreten Fouriertransformation

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F_n symmetrisch, sogar unitär ist.

(b) Zeigen Sie, dass $F_n^4 = I_n$ ist.

(c) Welche Werte kann die Determinante von F_n annehmen?

3. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

4. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, **(HA)** B^{-1} von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

mithilfe

(a) der **Adjunkten**,

(b) des **Gauß-Jordan-Verfahrens**,

(c) der Cramerschen Regel.

(d) Bestimmen Sie die Lösungen x, **(HA)** y der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad By = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

11. Hausaufgabe

Abgabetermin: 20.05.2016

---

1. Eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen, heißt Permutationsmatrix. Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?

2. Gegeben sei die folgende tridiagonale Matrix der Ordnung n:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\rho & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\rho & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\rho \end{bmatrix}$$

   (a) Man zeige mithilfe des Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det A_n = 2\cos\rho \cdot \det A_{n-1} - \det A_{n-2},\ \ n > 2.$$

   (b) Man zeige mittles vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(n\rho)$.

3. Lösen Sie folgendes (komplexes) Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -(1+\mathbf{i}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

   (a) mit Cramerscher Regel

   (b) mit der inversen Koeffizientenmatrix.

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 11. Übung.