

1. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mithilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und im A sowie Rang von A , wobei A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

$$(a) \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{array} \quad (b) \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \quad (c) \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{rcl} -2x + 4y + z & = & 0 \\ 3x + y - z & = & 0 \\ x + 2z & = & 0 \end{array} \quad (e) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ x - y + 2z & = & 0 \\ 3x - y + 3z & = & 0 \\ x + 3y - 4z & = & 0 \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \end{array} \quad (g) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ x + y - 5z & = & 0 \\ x - 3z & = & 0 \\ y - 2z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{array}$$

$$(h) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x - y + z - w & = & 0 \\ x + y - u + v & = & 0 \\ y + z + v - w & = & 0 \end{array} \quad (i) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}$$

2. Man bestimme die Lösung folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ :

$$(a) \begin{array}{rcl} x + y + \lambda z & = & 0 \\ x - \lambda y + z & = & 0 \\ \lambda x - y + z & = & 0 \end{array} \quad (b) \text{ (HA)} \begin{bmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 8 \\ 15x_1 + 10x_2 & = & 40 \end{array} \quad (b) \begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = & 2 \end{array} \quad (d) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ 2x - y - z & = & 0 \\ 5x - y + 3z & = & 1 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 2 \\ 3x - y + 3z & = & \lambda \end{array} \quad (f) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} x + y + \lambda z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & 1 \\ \lambda x + y + z & = & 1 \end{array}$$

$$(g) \text{ (HA)} \begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 & = & 8 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 & = & 3 \end{array} \quad (h) \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 & = & 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 2 \\ x_4 - x_5 + x_6 & = & 1 \end{array}$$

(bei (e) und (f) Aufgabenstellung wie in 2.)

4. Man bestimme den Rang folgender (reeller) Matrizen.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Zeigen Sie, dass $\text{rang } A \cdot B \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$ gilt.
6. Klassifizieren Sie die Lage dreier Ebenen des $\mathbb{R}^3$,

$$E_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0), \quad i = 1, 2, 3$$

mithilfe der Ränge $r = \text{rang } A, r' = \text{rang } A'$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, A' = [A|d].$$

Verwenden Sie gegebenenfalls auch

$$r_{ij} = \text{rang} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{bmatrix}, r'_{ij} = \text{rang} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \end{bmatrix}, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

9. Hausaufgabe

Abgabetermin: 13.05.2016

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 10. Übung!
2. Man bestimme den Rang und die k -te Potenz folgender Matrizen ($k \in \mathbb{N}$), wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j. \end{cases}$$

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \text{diag}(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}, \quad (c) J_n = (\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1}^n,$$

$$(d) U_n = (\delta_{i,j+1})_{i,j=1}^n, \quad (e) \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie den Rang folgender (reeller) Matrizen

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

