Mathematik für Physik und Computational Science, 9. Übung

SS 2016 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. (a) Man zeige, dass die Elemente $a = [2, 1, 0]^T$ und $b = [1, 2, 0]^T$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (b) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.
   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $e = [1, 1, 1]^T$ in der Basis $\{a, b, e_3\}$.

2. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraums V. Bilden dann die Vektoren $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_1 + a_3$ und $b_3 = a_2 + a_3$ auch eine Basis von V?

3. Zeigen Sie, dass die linearen Räume $\mathbb{R}_n[t]$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind!

4. Seien $p_\pm(t) = 1 \pm t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. Bestimmen Sie die Dimension von
$$U = \operatorname{span}\{p_+(t), p_-(t)\} \subseteq \mathbb{R}_2[t]$$
sowie eine Basis von U.

5. **(HA)** Überprüfen Sie die Linearität folgender Operatoren!
   Geben Sie die Matrixdarstellung $[A]$ bezüglich der kanonischen Basen an:
   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1; A(x, y, z) = x + 2y + 3z$,
   (b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A(x, y) = (x + y, x - y)$,
   (c) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{2n}[t]; (Af)(t) = f(t^2)$,
   (d) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n+1}[t]; (Af)(t) = tf(t)$,
   (e) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n-1}[t]; (Af)(t) = f'(t)$,
   (f) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]; (Af)(t) = f(2t + 4)$,
   (g) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]; (Af)(t) = f(0)$,
   (h) **(HA)** $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; A(x_i)_{i=1}^n = c(x_i)_{i=1}^n$ ($c \in \mathbb{R}$ fixiert).

6. Sei der $\mathbb{R}^3$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt ausgerüstet. Orthogonalisieren Sie die folgenden Systeme $\{a_1, a_2, a_3\}$.
   (a) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   (b) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   (c) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   (d) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$.

7. $\mathbb{R}_n[t]$ sei mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ ausgerüstet. Orthogonalisieren Sie das System

$$\left\{1, t, \frac{3}{2}t^2, \frac{5}{2}t^3\right\}$$

bezüglich dieses Skalarprodukts.

9. Hausaufgabe

Abgabetermin: 06.05.2016

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 9. Übung!

2. Es seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sowie $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}^2$ eine Linearkombination von g_1 und g_2 ist.

   (b) Stellen Sie die Vektoren $e_1 + 2e_2$ und $e_1 - 2e_2$ in der Basis $\{g_1, g_2\}$ dar.

3. $\mathbb{R}_n[t]$ sei mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ ausgerüstet. Orthogonalisieren Sie das System

$$\left\{1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}\right\}$$

bezüglich dieses Skalarprodukts.

Zusatz Orthogonalisieren Sie stattdessen bezüglich des Skalarprodukts

$$(f,g)_\alpha = \int_0^\infty f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$