

Mathematik für Physik und Computational Science, 0. Übung

WS 2015/16

<https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15>

1. (a) Welche Zahlbereiche und welche Rechenoperationen kennen Sie? Welche Rechenregeln sind Ihnen bekannt? Gelten einige nur für bestimmte Zahlbereiche?
- (b) Wir betrachten die Menge $\{0, 1\}$ versehen mit den Rechenoperationen modulo 2. Überzeugen Sie sich davon, dass diese korrekt definiert sind.
Welche der zuvor genannten Rechenaxiome gelten in diesem Fall?

2. (a) Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

$$x^2 + 6x, \quad z^2 - \frac{z}{7}$$

- (b) Leiten Sie die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her.
3. (a) Wir betrachten die unendliche Summe $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$. Welche der folgenden Rechnungen ist richtig?
 - $S = \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \dots = 0$
 - $S = 1 - \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \underbrace{1 - 1}_{=0} + \dots = 1$
 - $S = 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots)}_{=S} = 1 - S$, also $S = \frac{1}{2}$
- (b) Was ergeben folgende Rechnungen?
 - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$
 - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$
4. (a) Sie kennen zwei Vektormultiplikationen: das Skalar- und das Vektorprodukt. Wie lassen sich diese anschaulich interpretieren?
- (b) Wir definieren das Spatprodukt dreier Vektoren a, b, c durch $(a \times b) \cdot c$. Was ist das Resultat und wie kann man sich dieses vorstellen?
5. Es seien drei Kreise mit Radius 1 gegeben. Diese werden in der Ebene so angeordnet, dass jeder die anderen beiden berührt. Ermitteln Sie die Fläche der konvexen Hülle.
6. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (für Argumente von -5 bis 5)

$f(x) = \sin x$	$g(x) = \cos x$
$f_1(x) = x$	$g_1(x) = 1$
$f_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$	$g_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
$f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$g_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
$f_4(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$	$g_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$
$f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$	$g_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}$

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sin x & g(x) = \cos x \\
 f_1(x) = x & g_1(x) = 1 \\
 f_2(x) = x - \frac{x^3}{6} & g_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \\
 f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & g_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
 f_4(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} & g_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \\
 f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} & g_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}
 \end{array}$$

Was können Sie beobachten? Wie würden Sie f_6 und g_6 wählen? Überprüfen Sie Ihre Vermutung.

7. Beweisen Sie folgende Aussagen:
 - (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
 - (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
 - (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
 - (e) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
8. Was kennzeichnet die Begriffe des Betrages, des Abstandes und des Winkels und wie könnte man sie verallgemeinern?
9. Ein Dorf besteht aus nur drei Häusern A, B, C mit jeweils gleich vielen Bewohnern, die über die Wege a, b, c mit der Hauptstraße h verbunden sind (siehe Skizze). Das Dorf soll eine Bushaltestelle H für den entlang der Hauptstraße h verkehrenden Linienbus erhalten.

Wohin würden Sie die Haltestelle H bauen, wenn die Dorfbewohner im Mittel einen möglichst kurzen Weg zur Haltestelle haben sollen?

