Mathematik für Physik und Computational Science, 5. Hausaufgabe

Abgabetermin: 29. 01. 2016

WS 2015/16 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung!

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6n}\right)^n$, (b) $\left(\sum_{k=1}^{2015} \frac{k!}{5^k}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

3. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

   (a) Wie hoch wird der Turm?

   (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

   (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

4. Für $n > 1$ gilt offenbar

   $$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

   Leiten Sie daraus eine obere und eine untere Schranke für die folgende Reihe her:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Sind folgende Mengen abzählbar?

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}\}$,

   (b) Menge der Primzahlen,

   (c) $\mathbb{N}^k$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

   (d) Menge aller Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in \{0, 1\}$.