Mathematik für Physik und Computational Science, 4. Hausaufgabe

Abgabetermin: 15. 01. 2016

WS 2015/16 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 3. Übung!
2. Ermitteln Sie die Grenzwerte und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen nachstehender Folgen an diese (Skizze!):

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = -\frac{1}{n}$, (c) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, (d) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$,
   (e) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.
3. Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Geben Sie Beispiele mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ an, für die obige Aussage falsch ist. Insbesondere soll gelten:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$ $(c \in \mathbb{R})$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.
4. Geben Sie eine „ε-Definition“ dafür an, dass eine Folge (x_n) **nicht** gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
5. Es seien $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{7a_n+2}{6a_n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.
   (a) Zeigen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist, d. h. $a_n - a_{n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) Zeigen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist! Bestimmen Sie den Grenzwert.
6. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c. Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b, von dessen Fußpunkt das Lot auf c, dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen $h_i (i = 1, 2, \dots)$ aller Lote gleich $\frac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Skizzieren Sie sich das Verfahren. Drücken Sie h_i mithilfe eines der Winkel im Dreieck aus!)
7. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnummerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
   (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
   (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
   (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
   (d) Derartige Hotels stehen auf allen Planeten. Aufgrund der Weihnachtsfeiertage im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
   (e) Bei der Jahresendabrechnung wird der Hotelchef vom gastronomischen Zentrum gebeten alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnummerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?