Mathematik für Physik und Computational Science, 3. Hausaufgabe

Abgabetermin: 08. 01. 2016

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** markierten Aufgaben der 2. Übung!

2. Geben Sie folgende Mengen mithilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{-1, 1\}, \qquad M_2 = [-1, 1],$$
$$M_3 = (a, b), \qquad M_4 = (c, d],$$
$$M_5 = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}, \qquad M_6 = \{-4, -2, 2, 4\}.$$

3. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{und} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\},\\
M_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{oder} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\},\\
M_3 &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\},\\
M_4 &= \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\},\\
M_5 &= \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x = 0\},\\
M_6 &= \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\},\\
M_7 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\},\\
M_8 &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\},\\
M_9 &= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}.
\end{aligned}
$$

4. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen
   (a) der Lösungsmenge A der Gleichung $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$,
   der Lösungsmenge B der Gleichung $\sin \frac{x}{3} = 0$ und
   der Lösungsmenge C der Gleichung $\sin \frac{x}{5} = 0$
   (b) der Lösungsmenge L_1 der Gleichung $2 \sin^2 x = 1$ und
   der Lösungsmenge L_2 der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

5. Bilden Sie für die Mengen $M = \{a, b\}, I = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $I \times M, M \times I, M^2$!

6. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:
   (a) $X = \mathbb{R}$, $\quad xRy :\Leftrightarrow |\cos x| = |\cos y|$
   (b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\quad (a, b)R(c, d) :\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
   (c) $X = \mathbb{R}^n$, $\quad (x_j)_{j=1}^n R (y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \le y_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$
   (d) $X = \mathbb{C}$, $\quad zRw :\Leftrightarrow \arg z = \arg w \wedge |z| \le |w|$
   (e) $X = \mathbb{R}$, $\quad xRy :\Leftrightarrow 5|(x - y)$

7. Die Menge der Dreiecke wurde in
   (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
   (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige
   eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben? (Begründung!)