---

1. Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass dann die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

gilt, wobei $x = (x_k)_{k\geq 0} \in \ell^p$ und $y = (y_k)_{k\geq 0} \in \ell^q$.

2. Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass dann die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt, wobei $x = (x_k)_{k\geq 0},\ y = (y_k)_{k\geq 0} \in \ell^p$.

3. Sei $1 < p < \infty$. Bestimmen Sie den Dualraum $(\ell^p)^*$ zu ℓ^p.

4. Sei X ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A : X \to X$ eine lineare Abbildung. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir die Mengen $s_1(A)$ und $s_2(A)$ durch

$$\lambda \in s_1(A) :\Leftrightarrow \exists x \in X \setminus \{0\} : Ax = \lambda x$$

und

$$\lambda \in s_2(A) :\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{L}(X).$$

(a) Wie werden die Mengen $s_1(A)$ und $s_2(A)$ genannt?

(b) Zeigen Sie für Matrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Äquivalenz der beiden Definitionen.

(c) Ermitteln Sie beide Mengen für die folgenden Operatoren:

- $V : \ell^p(\mathbb{N}_0) \to \ell^p(\mathbb{N}_0),\ (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$,
- $S : \ell^p(\mathbb{N}_0) \to \ell^p(\mathbb{N}_0),\ (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots)$,
- $M : C(G) \to C(G),\ f(t) \mapsto t \cdot f(t)$,
- $D_1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$,
- $D_2 : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ f \mapsto f'$,
- $D_3 : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$,
- $D_4 : C^1(\mathbb{C}) \to C(\mathbb{C}),\ f \mapsto f'$,
- $J_1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ f(t) \mapsto \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$,
- $J_2 : C[0,1] \to C[0,1],\ f(t) \mapsto \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.

(d) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie für $A \in M_n(\mathbb{C})$ folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \lambda \in s_3(A) :\Leftrightarrow\ & \|(A - \lambda I)^{-1}\| > \frac{1}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow\ & \exists E \in M_n(\mathbb{C}) : \|E\| < \varepsilon \wedge \lambda \in s_2(A + E) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1 \wedge \|(A - \lambda I)x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

(e) Warum ist die Menge $s_3(A)$ von Bedeutung?

(f) Welche Beziehungen bestehen zwischen $s_1(A)$, $s_2(A)$ und $s_3(A)$?

5. Bestimmen Sie die adjungierten Operatoren zu V und S.

6. Sei X ein endlichdimensionaler linearer Raum und $A \in \mathcal{L}(X)$ sowie E eine Basis in X. Zeigen Sie, dass dann für die Matrixdarstellungen gilt $[A^*]_{E^*,E^*} = [A]_{E,E}^T$.