Mathematik für Physik und Computational Science, 17. Übung

---

1. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100 °C erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20 °C bis auf 25 °C ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf 60 °C abkühlt? (Hinweis: die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz.)

2. Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7 °C-Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewusste Alamagunther auf der patriotischen Temperatur von 19 °C hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, misst Alamagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Temperatur desselben auf 15 °C fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schließt er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19 °C) etwa drei Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muss, um es auf annehmbare 8 °C zu bringen. Hat er recht?

3. **(HA)** Bestimme die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?

4. Am Boden eines zylindrischen Gefäßes, welches bis zur Höhe H_0 mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine kleine Öffnung der Fläche q, die vom Zeitpunkt $t = 0$ an proportional zur Zeit geöffnet wird. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Zylinder zum Zeitpunkt $t = T$, wenn hier die Öffnung erstmalig vollständig offen ist? (Hinweis: Die Ausflussgeschwindigkeit von H_2O aus einer kleinen Öffnung, die sich in der Tiefe h unterhalb der freien Wasseroberfläche befindet ist gerade $\sqrt{2gh}$ mit Erdbeschleunigung g.)

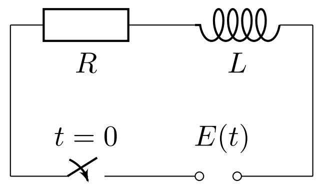
5. **(HA)** Bestimme das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_0 vorhanden ist. (Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1 600 Jahre.)

6. **(HA)** Bestimmen Sie alle Lösungen $y = y(x)$ folgender Differentialgleichungen:
   (a) $y' = -\frac{x}{y}$ (b) $y' = \frac{x}{x^2-1}$ (c) $2xy^2 + (x^2 - 1)y' = 0$.
   Welche Lösung von (a), (b) und (c) erfüllt die Bedingung $y(0) = 1$? Skizzieren Sie für diese Lösungen den Graphen in der xy-Ebene!

7. Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen:
   (a) $y' = 2xy - x^3 + x$,
   (b) $xy' - 2y = 2x^4$,
   (c) **(HA)** $y' = (\sin x)(1 - y)$,
   (d) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$,
   (e) $y' = \frac{-x}{1+x^2} y + \frac{1}{x(1+x^2)}$ $(x > 0)$, wenn zwei spezielle Lösungen gegeben sind
   $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \log\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-1 + \log\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right)$.
   (HA) Überprüfen Sie, dass y_1 die Differentialgleichung erfüllt.
   (f) **(HA)** $y' + y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \varphi(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ ($\varphi(x)$ sei gegebene differenzierbare Funktion.)

8. Gegeben seinen zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Bestimme aus ihnen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ($y_1 \neq y_2$). (Wenden Sie dies auf 7 (e) an!)

9. Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung $L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ = E(t)$ (R und L konstant). Berechne $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!
(a) $E(t) = E_0$ (b) **(HA)** $E(t) = kt$
(c) $E(t)$ beliebig.



10. **(HA)** Eine Kugel der Masse m werde aus großer Höhe mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf die Erde geworfen. Nehmen Sie an, dass die einzigen Kräfte, die auf sie wirken, der Luftwiderstand proportional zu ihrer Geschwindigkeit und die Erdanziehungskraft sind. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit!

11. **(HA)** Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $y' + y \sin x = \sin^3 x$, für die $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist.

12. Finde die Lösung der Gleichung $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$ die für $x \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

13. Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

14. **(HA)** Ein Kaugummi von einem Meter Länge ist mit einem Ende an einer Wand festgeklebt. Auf dem anderen Ende sitzt eine Schnecke mit Blick zur Wand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erfasst der Läufer Achilles dieses Ende und läuft mit der Geschwindigkeit $v_A = 10\frac{m}{s}$ von der Wand weg. Gleichzeitig beginnt die Schnecke mit $v_S = 1\frac{mm}{s}$ auf dem Kaugummi in Richtung Wand zu kriechen. Erreicht sie die Wand? Wenn ja, in welcher Zeit?

15. Lösen Sie die Integralgleichungen

(a) $y(x) = \int_0^x y(t)\mathrm{d}t + x + 1$ (b) $x^2 + y(x) = \int_a^x ty(t)\mathrm{d}t.$

16. Lösen Sie folgende Bernoulli-Differentialgleichungen:

(a) $xy' + y = xy^2 \log x,$ (b) **(HA)** $(x - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0,$

(c) **(HA)** $y' + \dfrac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0.$

Zusatz: Lösen Sie folgende Ricatti-Differentialgleichungen:

(a) $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x,$ (b) $y' = \mathrm{e}^{-x}y^2 + y - \mathrm{e}^x.$

(Erraten Sie jeweils eine partikuläre Lösung!)