Mathematik für Physik und Computational Science, 12. Übung

SS 2015 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

---

1. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mithilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$ sowie Rang von A, wobei A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(d) $\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$ (e) **(HA)** $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$

(f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (g) **(HA)** $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$

(h) **(HA)** $\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$ (i) **(HA)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

2. Man bestimme die Lösung folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ:

(a) $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ \lambda x - y + z &= 0 \end{aligned}$ (b) **(HA)** $\begin{bmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme:

(a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$ (d) **(HA)** $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3z &= \lambda \end{aligned}$ (f) **(HA)** $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$

(g) **(HA)** $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 &= 8 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 3 \end{aligned}$ (h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$

(bei (e) und (f) Aufgabenstellung wie in 2.)

4. Sei der $\mathbb{R}^3$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt ausgerüstet. Orthogonalisieren Sie die folgenden Systeme $\{a_1, a_2, a_3\}$.

(a) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(b) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(c) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(d) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$.

5. Seien $a_1 = \frac{1}{2}[1, -1, 1, -1]^T$, $a_2 = \frac{1}{2}[-1, 1, 1, -1]^T$. Man finde a_3, a_4 so, dass $\{a_i\}_{i=1}^4$ eine orthonormale Basis im $\mathbb{R}^4$ (mit üblichem Skalarprodukt) ist.

6. Geben Sie für folgende Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, deren algebraische und geometrische Vielfachheit sowie ein System zugehöriger Eigenvektoren an:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$, (e) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \end{bmatrix}$, (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(g) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, (h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Welche Matrizen sind diagonalisierbar? Geben Sie in diesem Fall eine entsprechende Transformationsmatrix T an, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. In welchen Fällen kann man T als unitäre (bzw. orthogonale) Matrix wählen?

7. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) A hat genau dann den Eigenwert $\lambda_0 = 0$, wenn A nicht invertierbar ist. In diesem Fall ist $n - \operatorname{rang} A$ die geometrische Vielfachheit von $\lambda_0 = 0$.

(b) Wenn A invertierbar ist und λ ist Eigenwert von A, dann ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}.

8. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $g(x)$ ein Polynom, $g(x) \in \mathbb{C}_m[x]$. Dann sind $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $g(A)$. Wie sehen zugehörige Eigenvektoren aus?

9. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen und geben Sie die Transformationsmatrix an:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (b) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -13 & 7 & -4 & 2 \\ 1 & -12 & 5 & -2 & 1 \\ 6 & -19 & 7 & -8 & 8 \end{bmatrix}$, (f) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.