Mathematik für Physik und Computational Science, 9. Übung

SS 2015 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

Unter $\vec{x}$ verstehen wir den Ortsvektor von x, $|\vec{x}|$ bezeichnet die Länge des Vektors $\vec{x}$, d. h. $|\vec{x}| = \|x\|$, $(\vec{a}, \vec{b})$ bezeichnet das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = ab$.

1. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren der Länge 1, die einen Winkel von $30°$ einschließen. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

2. Existieren Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die gleichzeitig die Eigenschaften $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = 30$ besitzen?

3. (a) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ senkrecht stehen.
   (b) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ und $\vec{b}$ mit $b = [0 \;\; -1 \;\; 1]^T$ senkrecht stehen.

4. Gibt es einen Vektor, der mit den Vektoren i, j, k je einen Winkel von $45°$ einschließt?

5. Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$. Diese heißen **windschief**, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind.

   Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass g_1 und g_2 windschief sind. Verwenden Sie dazu den Begriff des Kreuzproduktes.

6. Stellen Sie ein Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) auf, welches den Abstand zweier windschiefer Geraden sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes liefert.

7. Gegeben seinen zwei Ebenen E_1 und E_2: E_1 liegt parallel zur Ebene $x + 2y + 2 = 0$ und enthält den Punkt $P(2, 5, -6)$. E_2 enthält die Punkte $Q(1, 0, 1)$, $R(-1, -2, 1)$ und $S(4, 1, 2)$. Man bestimme
   (a) die Ebenengleichungen von E_1 und E_2,
   (b) die Schnittgerade von E_1 und E_2.

8. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen

$$E_1 : 2x + y + z - 4 = 0 \qquad \text{und} \qquad E_2 : x + 2y - z + 3 = 0.$$

9. Formulieren und beweisen Sie den Satz des Thales!

10. Sei $A = (0, 0)$, $B = (0, 4)$. Was ist der geometrische Ort aller Punkte P, die
    (a) $|AP| + |PB| = 8$, (b) $|AP| + |PB| = 4$, (c) $|AP| + |PB| = 2$
    erfüllen?

11. Finden Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 = a^2 + y^2$ und den Winkel zwischen ihren beiden Asymptoten.