Mathematik für Physik und Computational Science, 8. Übung

---

1. Bestimmen Sie für die (reellwertige) Funktion $f(x)$ das Taylorpolynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt x_0 und geben Sie das Restglied nach Lagrange an:

   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}, \quad x_0 = 0$
   (b) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}, \quad x_0 = 1$
   (c) **(HA)** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0$
   (d) **(HA)** $f(x) = \tan x, \quad x_0 = 0$

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades von $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ mithilfe

   (a) **(HA)** der Ableitungen,
   (b) von Reihenmultiplikation.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   (a) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(z-1)^n}{1+\sqrt{n}}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}(z+2)^n$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-1)^n}{n!}$.

   Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen?

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe nach Potenzen von $z \in \mathbb{C}$ (unter Verwendung bekannter Taylorreihen).

   (a) $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$,
   (b) **(HA)** $f(z) = \sinh z$,
   (c) $f(z) = a^z$,
   (d) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$.

   Geben Sie den Konvergenzbereich an!

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe zum Entwicklungspunkt z_0 und geben Sie den Konvergenzbereich an!

   (a) $f(z) = \mathrm{e}^z \quad (z_0 = \pi)$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} \quad (z_0 = 2)$
   (c) **(HA)** $f(z) = \sin z \quad (z_0 = \pi)$
   (d) **(HA)** $f(z) = z^2\mathrm{e}^{-z} \quad (z_0 = 0)$.

6. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourierreihe im angegebenen Intervall nach dem Funktionensystem $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ (Diskussion der Sprungstellen, Intervallenden und Skizze).

   (a) $f(x) = \sin ax$ in $(-\pi, \pi) \quad (a = \text{const})$,
   (b) $f(x) = |\cos x|$ in $(-\infty, \infty)$,
   (c) **(HA)** $f(x) = |x|$ in $(-\pi, \pi)$,
   (d) **(HA)** $f(x) = \operatorname{sgn} x$ in $(-\pi, \pi)$.

7. Zerlegen Sie $f(x) = x^2$ in eine Kosinusreihe! Bestimmen Sie mithilfe dieser Resultate die Summe der Reihen

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}!$$