

1. Berechnen Sie

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \text{(HA)} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx, & \text{(b)} \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \\
 \text{(c)} \quad \text{(HA)} \int \frac{1+x}{1-x} dx, & \text{(d)} \quad \int \frac{2x+5}{x^2+4x+5} dx, \\
 \text{(e)} \quad \text{(HA)} \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx, & \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.
 \end{array}$$

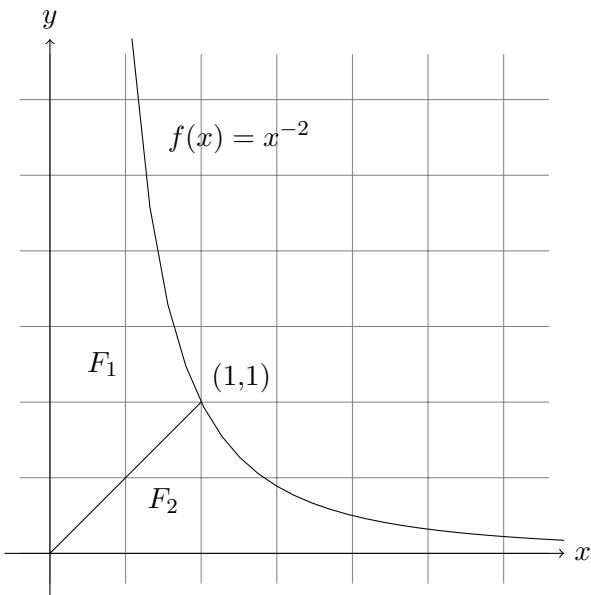
2. Berechnen Sie für  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \text{(HA)} \int_{-1}^1 x|x| dx, & \text{(b)} \quad \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}, \quad \text{(c)} \quad \int_0^1 \frac{x}{a+bx} dx, \quad \text{(Z)} \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.
 \end{array}$$

3. Zeigen Sie folgende Abschätzungen

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \text{(HA)} \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}, & \text{(b)} \quad \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \log 2.
 \end{array}$$

4. Untersuchen Sie, ob die in der Abbildung dargestellten Flächen  $F_1$  und  $F_2$  einen endlichen Flächeninhalt besitzen.



5. Berechnen Sie folgende uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}, & \text{(b)} \quad \text{v.p.} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}, \\
 \text{(c)} \quad \int_\pi^\infty \sin x dx, & \text{(d)} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \sin x dx,
 \end{array}$$

$$(e) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}},$$

$$(f) \text{ v.p.} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}},$$

$$(g) \text{ (HA) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \sin b x dx, \quad (a < 0, b \in \mathbb{R}),$$

$$(h) \text{ (HA)} \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx,$$

$$(i) \text{ (HA)} \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$(j) \text{ (HA)} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx,$$

$$(k) \text{ (HA) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

6. Berechnen Sie mithilfe eines Kurvenintegrals den Umfang

(a) (HA) des Kreises mit Radius  $a$  ( $a > 0$ ),

(b) der Astroide:  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ .

7. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven

(a)  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, (0 \leq t < \infty)$

(b) (HA) Stück einer Schraubenlinie der Ganghöhe  $2\pi h$  ( $h > 0$ ):

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ht \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$$

(c) (HA) Stück der Neilschen Parabel  $x^{\frac{3}{2}}$ , ( $0 \leq x \leq 4$ )

8. Ein Malermeister soll einen unendlichen Trichter, der bei Rotation des Graphen der Funktion  $z : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, z(y) = \frac{1}{y}$  um die  $y$ -Achse entstanden ist, rot einfärben. Sollte er den Trichter anmalen oder mit Farbe füllen?