

1. Berechnen Sie

$$\begin{array}{ll} \text{(a) (HA)} & \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \\ \text{(c) (HA)} & \int \frac{1+x}{1-x} dx, \quad \text{(d)} \quad \int \frac{2x+5}{x^2+4x+5} dx, \\ \text{(e) (HA)} & \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx, \quad \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}. \end{array}$$

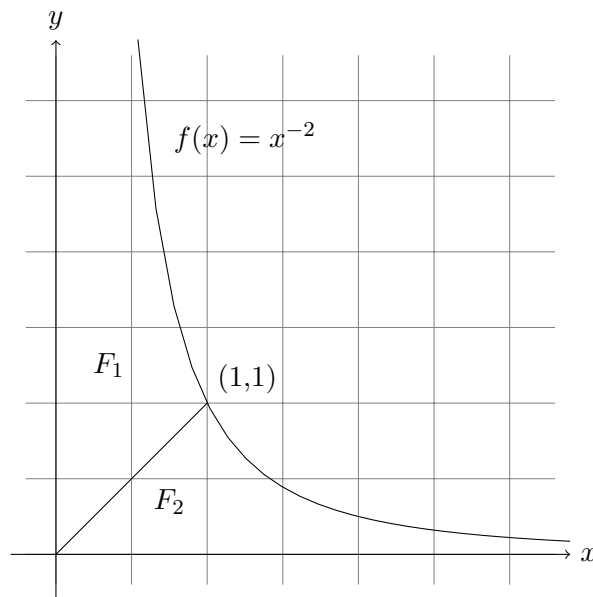
2. Berechnen Sie für $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{array}{llll} \text{(a) (HA)} & \int_{-1}^1 x|x| dx, & \text{(b)} & \int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}, \quad \text{(c)} \quad \int_0^1 \frac{x}{a+bx} dx, \quad \text{(Z)} \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx. \end{array}$$

3. Zeigen Sie folgende Abschätzungen

$$\begin{array}{ll} \text{(a) (HA)} & \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \log 2. \end{array}$$

4. Untersuchen Sie, ob die in der Abbildung dargestellten Flächen F_1 und F_2 einen endlichen Flächeninhalt besitzen.



5. Berechnen Sie folgende uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}, \quad \text{(b)} \quad \text{v.p.} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}, \\ \text{(c)} & \int_\pi^\infty \sin x dx, \quad \text{(d)} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \sin x dx, \end{array}$$

$$(e) \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}},$$

$$(f) \quad \text{v.p.} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}},$$

$$(g) \quad (\mathbf{HA}) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \sin bx dx, \quad (a < 0, b \in \mathbb{R}),$$

$$(h) \quad (\mathbf{HA}) \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx,$$

$$(i) \quad (\mathbf{HA}) \quad \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$$

$$(j) \quad (\mathbf{HA}) \quad \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx,$$

$$(k) \quad (\mathbf{HA}) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

6. Berechnen Sie mithilfe eines Kurvenintegrals den Umfang

(a) **(HA)** des Kreises mit Radius a ($a > 0$),

(b) der Astroide: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ($0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$).

7. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven

(a) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, ($0 \leq t < \infty$)

(b) **(HA)** Stück einer Schraubenlinie der Ganghöhe $2\pi h$ ($h > 0$):

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ht \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$$

(c) **(HA)** Stück der Neilschen Parabel $x^{\frac{3}{2}}$, ($0 \leq x \leq 4$)

8. Ein Malermeister soll einen unendlichen Trichter, der bei Rotation des Graphen der Funktion $z : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $z(y) = \frac{1}{y}$ um die y -Achse entstanden ist, rot einfärben. Sollte er den Trichter anmalen oder mit Farbe füllen?