Mathematik für Physik und Computational Science, 6. Übung

WS 2014/15 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

---

1. Zeigen Sie, dass $x = 0$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $\mathrm{e}^x = 1 + x$ ist.

2. Beweisen Sie die Ungleichung $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

3. Welches Rechteck mit den Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, das in die Ellipse einbeschrieben ist, besitzt den größten Flächeninhalt?

4. Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$$
Unstetigkeitsstellen, die Nullstellen und die Extrema, die Asymptoten, die Wendepunkte und alle Intervalle, in denen f konvex bzw. konkav ist.

5. Schätzen Sie den Fehler ab der durch die Näherung $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ für $0 \leq x \leq 1$ entsteht.

6. Gelten folgende Beziehungen bei $x \to x_0$:
(a) $\sin x = \mathcal{O}(x \cos x),\ x_0 = 0$, (b) $x = \mathcal{O}(\mathrm{e}^x),\ x_0 = \infty$,
(c) **(HA)** $\mathrm{e}^x = \mathcal{O}(1),\ x_0 = 0$, (d) **(HA)** $x^5 = o(x^4),\ x_0 = \infty$,
(e) **(HA)** $\mathrm{e}^x = 1 + \mathcal{O}(x^2),\ x_0 = 0$, (f) **(HA)** $x \cos x = x + o(x^2),\ x_0 = 0$.

7. Gibt es Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und positive reelle Zahlen k so, dass für $x \to 0$ gilt:
(a) $\cos x - 1 \sim Cx^k$, (b) **(HA)** $\sin x \sim Cx^k \cos x$,
(c) $\sqrt{1+x} - 1 \sim Cx^k$, (d) **(HA)** $\sqrt[m]{1+x} - 1 \sim Cx^k$,
(e) **(HA)** $\tan x - \sin x \sim Cx^k$.

8. Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitutionen
(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{3-2x^2}$, (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,
(d) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x \log(\log x)}$, (e) **(HA)** $\displaystyle\int \tan x\mathrm{d}x$, (f) **(HA)** $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\mathrm{d}x$.

9. Bestimmen Sie mithilfe der Methode der partiellen Integration
(a) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$,
(c) **(HA)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\log^2 x\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\int \arctan x\mathrm{d}x$,
(e) **(HA)** $\displaystyle\int x\log\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$, (f) **(HA)** $\displaystyle\int \cos^2 x\mathrm{d}x$.

10. Berechnen Sie mithilfe der Partialbruchzerlegung
(a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$, (b) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,
(c) $\displaystyle\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}$, (d) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x$,
(e) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}$, (f) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.