Mathematik für Physik und Computational Science, 5. Übung

WS 2014/15 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls (ohne Verwendung der Regel von l'Hospital)! In welchen Fällen liegt bestimmte Divergenz vor?

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{2}{x+1}+3}{5+\frac{1}{x^2-1}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x}$, (f) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, (h) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x(x+1)}-x)$,

   (i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$, (j) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt „1^∞".

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \quad (a\in\mathbb{R})$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

3. Bestimmen Sie die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ für:

   (a) $f(x) = (\tan(\frac{\pi}{8}+x))^{\tan 2x},\ a=\frac{\pi}{4}$, (b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x},\ a=0,\ a=1$,

   (c) **(HA)** $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x},\ a=0$, (d) **(HA)** $f(x) = |x|-x,\ a=0$,

   (e) **(HA)** $f(x) = \dfrac{|2x|}{x},\ a=1,\ a=0$.

4. Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in $x=a$, jeweils nach der ε-δ-Definition:

   (a) $f:(0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x},\quad a\in(0,1)$,

   (b) **(HA)** $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2,\quad a\in[-1,1]$.

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit in $[-1,1]$.

   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, (b) **(HA)** $f(x) = \cos x^2 - (\sin x)^3 + \sqrt{|x|}$,

   (c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & : \ x\ge 0 \\ \frac{1}{2^x} & : \ x<0 \end{cases}$, (d) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & : \ x\neq 0 \\ 0 & : \ x=0 \end{cases}$.

6. Untersuchen Sie mithilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b} \quad (b\neq 0)$, (b) $f(x)=|x|$, (c) **(HA)** $f(x)=\sin x$.

7. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar sind). Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   (a) $y=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$, (b) $y=a^{(a^x)}$, (c) $y=x^x$.

8. Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\log x$, (d) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$, (e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

9. Wie erklärt man folgendes Phänomen: Der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

ist von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“ und offenbar gleich 1. Nach der Regel von l'Hospital erhält man als Quotienten der Ableitungen aber $1 + \cos x$, was für $x \to \infty$ keinen Grenzwert besitzt.