Mathematik für Physik und Computational Science, 3. Übung

WS 2014/15 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

---

1. Geben Sie a und $N(\varepsilon)$ an, so dass $\forall\varepsilon > 0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)$:

   (a) $x_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}$, (b) **(HA)** $x_n = \frac{\sin^3 n+\cos^2 n}{\sqrt{n}}$, (c) **(HA)** $x_n = \frac{n-1}{n^2-1} - 1$.

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte von

   (a) $x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$,

   (b) **(HA)** $x_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$,

   (c) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(k, j \in \mathbb{N})$,

   (d) **(HA)** $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$,

   (e) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

   (f) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$,

   (g) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$,

   (h) **(HA)** $x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$,

   (i) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$,

   (j) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$,

   (k) $x_n = \frac{n^3+(-1)^n n^2}{2n^3+1}$,

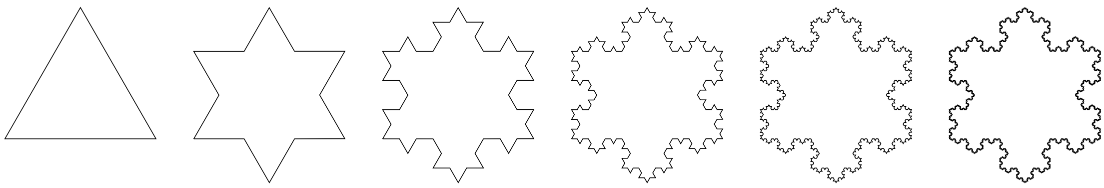
   (l) **(HA)** $x_n = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}$,

   (Z) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ $n \geq 2, x_0 = 2, x_1 = 1$.

3. Es sei (x_n) eine Nullfolge und (c_n) eine beschränkte Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass $\tilde{x}_n := c_n x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

4. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a unterliegt die sogenannte Kochsche Schneeflocke der folgenden Bildungsvorschrift. Die Berandung T_n nach dem n-ten Entwicklungsschritt entsteht aus T_{n-1} indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

   Man berechne den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n der Figur T_n sowie $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$. (Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a beträgt $F_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.)

   (Schneeflocken $T_0, \ldots, T_5$)

5. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

   (a) $x_n = \frac{c^n}{n!}$ $(c > 0)$, **(Z)** $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ $(c > 0)$,

   (b) $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ $(0 < x_0 < 1)$.

   (c) **(HA)** Lösen Sie (b) für x_0 beliebig graphisch mithilfe des Computers!

Zusatz: Seien $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Beweisen Sie:

(a) $\mathrm{e} - s_n < \frac{1}{n!n}$. (b) Die Zahl e ist irrational.