Mathematik für Physik und Computational Science, 2. Übung

---

1. Geben Sie folgende Mengen mithilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{2,4,6,8,10,\ldots\}, & M_2 = \{1,4,9,16,25,\ldots\}, \\ M_3 = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}, & M_4 = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots\}. \end{array}$$

2. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{1,2,3\}$ an!

3. Wie viele verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

4. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:
   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,
   (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (c) **(HA)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
   (d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie
   (a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (c) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$, (d) **(HA)** $\bigcap\limits_{1\leq t<2} M_t$,
   (e) **(HA)** $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$.

6. Geben Sie alle Funktionen $f : I \to M$ an:
   (a) $I = \{a_1, a_2\}$, $M = \{1,2\}$, (b) $I = \{a\}$, $M = \{l, m, n\}$,
   (c) $I = \{a, b\}$, $M = \{3\}$
   und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind!

7. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

	(a)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \mathrm{e}^x$
(HA)	(b)	$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,	$f(x) = \mathrm{e}^x$
	(c)	$A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sqrt{x}$
	(d)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sin x$
(HA)	(e)	$A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \tan x$
	(f)	$A = B = \mathbb{N}$,	$f(n) = n^2$
(HA)	(g)	$A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}$,	$f(n) = \frac{1}{n}$
	(h)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \lvert 2x - 4 \rvert$

   Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A', B' von A, B an, sodass $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

8. Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f : X \to Z, h(x) := g(f(x))$, ihre Komposition. Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv. (Gilt h bijektiv auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g?)

9. Geben Sie eine Relation auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$ an, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist.

10. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

	(a)	$X = \mathbb{N}$,	mR_an,	wenn $m+n$ gerade
(HA)	(b)	$X = \mathbb{N}$,	mR_bn,	wenn $m+n$ ungerade
	(c)	$X = \mathbb{N}$,	mR_cn,	wenn $\lvert m-n \rvert \leq 2$
	(d)	$X = \mathbb{N}$,	mR_dn,	wenn $\frac{m}{n} \in 2^{\mathbb{Z}}$
	(e)	$X = \mathbb{N}$,	mR_en,	wenn $m \mid n$
	(f)	$X = \mathbb{R}$,	xR_fy,	wenn $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$
	(g)	$X = \mathbb{R}$,	xR_gy,	wenn $x^2 = y^2$
	(h)	$X = \mathbb{Z}$,	aR_hb,	wenn $4 \mid (a-b)$
(HA)	(i)	$X = \mathbb{N}$,	mR_in,	wenn mn ungerade
	(j)	$X = \mathbb{R}$,	xR_jy,	wenn $x \leq y$
(HA)	(k)	$X = \mathbb{R}$,	xR_ky,	wenn $x > y$
(HA)	(l)	$X =$ beliebiges Mengensystem,	AR_lB,	wenn $A \subseteq B$
	(m)	$X =$ Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$,	gR_mh,	wenn $g \parallel h$
	(n)	$X =$ Menge der Menschen,	$\widetilde{\smiley}\ R_n\ \widehat{\frownie}$,	wenn $\widetilde{\smiley}$ liebt $\widehat{\frownie}$

11. Welche der Relationen aus Aufgabe 10 sind Ordnungsrelationen und welche Äquivalenzrelationen? (Geben Sie die entsprechende Klasseneinteilung an!)

12. Zeigen Sie, dass folgende Relation auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

13. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden Mengen an:

(a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, (b) **(HA)** $[a, b], [c, d]$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, (c) **(HA)** $(-\infty, \infty), (0, 1)$,

(d) $[0, 1), (0, 1]$.

Zusatz: Gibt es eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:
(a) $(0, 1), (0, 1]$, (b) $(0, 1) \times (0, 1), (0, 1)$,
(c) M beliebige Menge, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.
Wenn ja, geben Sie eine Bijektion an!