Mathematik für Physik und Computational Science, 1. Übung

WS 2014/15 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb

---

1. Seien m, n, k natürliche Zahlen. Sind folgende Aussagen wahr? Falls die Aussagen im Allgemeinen nicht gelten, geben Sie Bedingungen für deren Gültigkeit an!
   (a) Wenn k die Zahl m teilt ($k|m$) und m die Zahl n teilt ($m|n$) dann gilt $k|n$.
   (b) Wenn $k|m$ und $k|n$ gilt, dann folgt $k|(m+n)$.
   (c) Wenn k das Produkt $m \cdot n$ teilt, dann teilt k die Zahl m oder die Zahl n.
   (d) Wenn m und n den Rest r bei Division durch k lassen, dann lässt $m+n$ auch den Rest r.
   (e) **(HA)** Gelten die Aussagen (b) und (d) für das Produkt $m \cdot n$?
   (f) Es gibt endlich viele Primzahlen.
   (g) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.
   (h) Es existiert genau ein positiver größter gemeinsamer Teiler $d = \text{ggT}(a_1, a_2)$ und dieser lässt sich in der Form $d = a_1x_1 + a_2x_2$ mit $x_i \in \mathbb{Z}$ darstellen.

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x-2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x+1|$, (c) $|x+2| + |x-2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

3. Veranschaulichen Sie in der xy-Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x+y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x-y| \leq 2$.

4. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

   und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:
   (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$,
   (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
   (c) **(HA)** $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$,
   (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
   (e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
   (f) **(HA)** $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

5. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:
   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
   (b) **(HA)** $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 5$,
   (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fixiert),
   (d) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

6. Man löse folgende Ungleichungen:
   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,
   (c) **(HA)** $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

7. Dividieren Sie:

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

8. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$, (b) $(1 + \mathbf{i})^3$, (c) **(HA)** $(1 + 2\mathbf{i})^6$, (d) $\frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) $\mathbf{i}^k$ $(k \in \mathbb{Z})$,

(f) $\frac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0))$, (g) $\frac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, (h) $(a + b\mathbf{i})^n$ $(a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$.

9. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin\alpha + \mathbf{i}(1 - \cos\alpha)$ $(\alpha \in [-\pi, \pi))$, (d) $1 + \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}$.

10. Es sei $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x, y \in \mathbb{R}, \varphi \in [-\pi, \pi), r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

(a) $\overline{z}$, (b) $\frac{1}{z}$, (c) z^2, (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\overline{z}$, (f) **(HA)** $\left|\frac{z}{\overline{z}}\right|$.

11. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

(a) $(1 + \mathbf{i})^{10}$, (b) $(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) **(HA)** $(-1 + \mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^3$, (e) **(HA)** $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^9$.

12. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

(a) $z = \frac{1}{\overline{z}}$, (b) $\operatorname{Re}(z^2) = 1$, (c) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = c$, (d) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$, (e) $2 < |z| < 4$,

(f) $|z - z_0| = |z - z_1|$, (g) $|z + 3| + |z - 3| \leq 10$,

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

13. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $z^3 = -1$, (b) $z^4 + 1 = 0$, (c) **(HA)** $z^3 + 2 = 2\mathbf{i}$, (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$,

(e) $z^2 = -3 - 4\mathbf{i}$, (f) $z^4 - 2\mathbf{i}z^2 + 2\mathbf{i} = 1$, (g) $z^2 + 4\mathbf{i}z + 5 = 0$

14. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$2(|z|^2 + |w|^2) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

gilt.

15. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

(a) $p(z) = z^3 + 1$, (b) $p(z) = z^4 - 16$, (c) **(HA)** $p(z) = (z^3 - 1)(z^3 + 8)$.

16. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \log_2 3 + \mathbf{i}\log_2 6$ irrational?

17. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

18. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha, n\alpha \notin \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung

$$\left(\frac{1 + \mathbf{i}\tan\alpha}{1 - \mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \frac{1 + \mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1 - \mathbf{i}\tan(n\alpha)}$$

gilt.

19. Es seien $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.