Lineare Algebra II

18. Übung – Minimalpolynom, Jordannormalform

---

1. Man berechne das minimale Polynom für folgende Matrizen:

   (a) $U_n = [\delta_{i,j+1}]_{i,j=1}^n$ Shift-Matrix, (**HA**) (b) $J_n = [\delta_{i,n+1-j}]_{i,j=1}^n$ Flip-Matrix,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (d) $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (e) $\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen, und geben Sie die Transformationsmatrix an:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (**HA**) (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -13 & 7 & -4 & 2 \\ 1 & -12 & 5 & -2 & 1 \\ 6 & -19 & 7 & -8 & 8 \end{bmatrix}$,

   (**HA**) (f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. (a) Zeigen Sie, dass folgende Matrizen ähnlich sind und geben Sie die Transformationsmatrix T an, so dass $A = T^{-1}BT$!

   $$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 13 & -1 & -7 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

   (b) Lösen Sie die Zusatzaufgabe der 13. Hausaufgabe!

18. Hausaufgabe

---

1. Sind die Matrizen A und B ähnlich
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

2. Überprüfen Sie die Richtigkeit des Satzes von Cayley-Hamilton an folgenden Beispielen:
(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $A_3 = J_4$.
Bestimmen Sie mit diesem Satz die Inverse von A_2.

3. Seien $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}, p_{AB}(t)$ und $p_{BA}(t)$ die charakteristischen Polynome von AB bzw. BA. Zeigen Sie, dass
$$(-1)^m p_{AB}(t)t^n = (-1)^n p_{BA}(t)t^m$$
gilt. Im Fall $m = n$ gilt insbesondere
$$p_{AB}(t) = p_{BA}(t)\,.$$
(Hinweis: Verwenden Sie die Matrixgleichung
$$\begin{bmatrix} \lambda I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}$$
sowie eine dazu analoge Gleichung!)

4. Beweisen Sie, dass ähnliche Matrizen gleiche charakteristische Polynome haben! Gilt auch die Umkehrung?

5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 18. Übung!