Lineare Algebra II

16. Übung – Orthogonale Basen, Orthogonale Unterräume

---

1. Sei der $\mathbb{R}^3$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt ausgerüstet. Orthogonalisieren Sie die folgenden Systeme $\{a_1, a_2, a_3\}$

   (a) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (b) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (d) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$

   (e) **(HA)** $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$

2. Seien $a_1 = \frac{1}{2}[1, -1, 1, -1]^T$, $a_2 = \frac{1}{2}[-1, 1, 1, -1]^T$.

   (a) Man finde a_3, a_4 so, dass $\{a_i\}_{i=1}^4$ eine orthonormale Basis im $\mathbb{R}^4$ (mit üblichem Skalarprodukt) ist.

   (b) Sei $U = \text{lin}\{a_1, a_2\}$. Geben Sie $U^\perp$ an!

   (c) Stellen Sie den Vektor $b = [1, 1, 1, 0]^T$ als Summe $b = b_1 + b_2$ mit $b_1 \in U$, $b_2 \in U^\perp$ dar!

   (d) Geben Sie den orthogonalen Projektor $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\text{im} P = U$, an! Bestimmen Sie $\ker P$!

   (e) Berechnen Sie den Abstand des Vektors b aus (c) zum Unterraum U!

3. Sei $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folgende Funktion

   $$g\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_3 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 \,.$$

   Ist durch g ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ definiert?

4. Seien $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ und $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ die Matrixdarstellung von A in der kanonischen Basis.

(a) Geben Sie mit Hilfe einer orthonormalen Basis in im A denjenigen Vektor $\tilde{x}$ an, für den gilt $\quad \|[A]\tilde{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|[A]x - b\|$, $\quad$ wenn

$$\text{(a1)} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(HA)} \quad \text{(a2)} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(HA)} \quad \text{(a3)} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Geben Sie alle Linksinversen von A an!

(c) Bestimmen Sie die Linksinverse $A^\dagger$, für die $\tilde{x} = A^\dagger b$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $AA^\dagger$ Orthoprojektor auf im A ist.

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^m$ direkte orthogonale Summe von im A und $\ker A^T$ ist, $\mathbb{R}^m = \text{im}\, A \oplus \ker A^T$ mit $\text{im}\, A \perp \ker A^T$.

Zusatz 1: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, rang $A = m$. Zeigen Sie, dass $\hat{x} = A^T(AA^T)^{-1}b$ die normkleinste Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist.

Zusatz 2: Bestimmen Sie alle zu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ rechtsinversen Matrizen $A_R^{(-1)}$. Geben Sie alle Lösungen von $Ax = [1, -1]^T$ an! Welche ist die normkleinste Lösung $\hat{x}$?

16. Hausaufgabe

---

1. Sei L Euklidischer Raum, U und V lineare Unterräume. Man zeige

   (a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$, $\qquad$ (b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

2. Sei $a = [-3, 0, -5, 9]^T$, und sei $L \subset \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0\,, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0\,, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

   Man bestimme $l, m \in \mathbb{R}^4$ so, dass $a = l + m$ mit $l \in L, m \in L^\perp$ gilt.

3. Sei $s : \mathbb{C}_n[x] \times \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}$ folgende Funktion

$$s(f(x), g(x)) = \sum_{j=0}^{n} f_j \overline{g}_j$$

   mit $f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j x^j$.

   (a) Ist durch s ein Skalarprodukt in $\mathbb{C}_n[x]$ definiert?

   (b) Wenn ja: Bestimmen Sie ein (reelles) Polynom 2. Grades, das zu den Polynomen

$$p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1, \;\; p_2(x) = -x^2 + 2x + 1\,,$$
$$p_3(x) = 3x^2 + 2x + 5, \;\; p_4(x) = 3x^2 + 5x + 2$$

   den gleichen Abstand (bezüglich der durch s definierten Metrik) hat.

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 16. Übung!