Lineare Algebra II

14. Übung – Lineare Unterräume, Lösung (reeller) linearer Gleichungssysteme (Gauß'scher Algorithmus)

---

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Geben Sie
   (a) zu $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ einen Komplementärraum im $\mathbb{R}^2$ und
   (b) zu $B = \operatorname{span}\{(2,1,0),(1,2,0)\}$ alle Komplementärräume im $\mathbb{R}^3$ an!

2. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$, sowie Rang, Defekt und Index von A wenn A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

   (a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

   (d) $\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$ **(HA)** (e) $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$ (f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

   (g) $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$ **(HA)** (h) $\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$ **(HA)** (i) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

3. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ:

   (a) $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ \lambda x - y + z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus, und stellen Sie die Lösungsmenge als lineare Mannigfaltigkeit dar:

   (a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

   (c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$ **(HA)** (d) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$

   (e) $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3z &= \lambda \end{aligned}$ **(HA)** (f) $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$

   (bei (e) und (f) Aufgabenstellung wie in Aufgabe 3.)

(HA) (g)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 &= 8 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

Zusatz: Zeigen Sie, dass es zu jedem Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ einen linearen Operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $U = \ker A$ gibt. Verallgemeinern Sie dies, wenn U lineare Untermannigfaltigkeit ist!

14. Hausaufgabe

---

1. Beweisen Sie, dass $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und dass $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von W ist. Gilt $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \in W$?
   Geben Sie alle Komplementärräume von W an! Welcher dieser Räume steht senkrecht auf W?

2. Sei X linearer Raum. Zeigen Sie: Für zwei Unterräume U und V von X sind auch die Mengen $U \cap V$ und $U + V$ wieder Unterräume. Was ist, wenn U und V Untermannigfaltigkeiten sind?

3. Gegeben seien $u_1 = (1, 1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (0, 3, 2, 1)$ und $u_4 = (0, 1, 1, 1)$ im $\mathbb{R}^4$. Sind diese Vektoren linear unabhängig? Berechnen Sie $\dim(U+V)$ und $\dim(U \cap V)$ für $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ und $V = \operatorname{span}\{u_3, u_4\}$!

4. Geben Sie für folgende (reelle) Matrizen A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine Basis in $\ker A_i$ und $\operatorname{im} A_i$ an:
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1\ 0\ 1].$$
   Untersuchen Sie, ob die Vektoren
$$b_1 = e_1\,, \ b_2 = b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ a^3 \\ b^3 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   Elemente der Bildmenge $\operatorname{im} A_i$ sind, d.h. ob $b_i \in \operatorname{im} A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gilt!

5. Lösen Sie das komplexe Gleichungssystem aus Aufgabe 3 der 12. Hausaufgabe mit Hilfe der Aufgabe 4 der 12. Übung!

6. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 14. Übung.