Lineare Algebra II

13. Übung – Basistransformationen, Ränge

---

1. In $\mathbb{R}_2[t]$ seien die Basen $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2 + t - t^2, 2 - t + 2t^2, 3 + t^2\}$ gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen (Basisübergangsmatrizen) $U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ und $U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$!

   (b) Geben Sie die Koordinaten der Polynome

   $$p(t) = 1 + t + t^2 \text{ und } q(t) = p(t) + (2 - t)(1 + t)$$

   in beiden Basen an (vgl. 2(c) der 10. Übung)!

2. Lösen Sie die Aufgaben 2(b), 2(d) (**(HA)** wie gehabt) mit Hilfe von Basisübergangsmatrizen!

3. (a) Sind die Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ äquivalent oder sogar ähnlich?

   (b) **(HA)** Bestimmen Sie alle zu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ähnlichen (reellen) Matrizen!

   (c) Sind folgende Matrizen aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ähnlich:

   $$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B = \operatorname{diag}(a + \mathbf{i}b, a - \mathbf{i}b) \quad (a, b, \in \mathbb{R})\,?$$

4. Seien A, B Matrizen mit komplexen Einträgen der Größe $m \times n$ bzw. $n \times k$.
   Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang} A \cdot B \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$ gilt.

5. Man bestimme den Rang folgender (reeller) Matrizen

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ und $[A]$ die diesem Operator zugeordnete Matrix (bzgl. der kanonischen Basis). Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang}[A] = r$ dann und nur dann gilt, wenn in $\mathbb{C}^n$ zwei jeweils linear unabhängige Systeme von Vektoren $\{x_i\}_{i=1}^r, \{y_i\}_{i=1}^r$ existieren, so dass $[A]$ die Darstellung gestattet:

   $$[A] = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i^T. \tag{1}$$

   Lässt sich die Aussage auf $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ verallgemeinern?

7. Wir betrachten folgende spezielle Matrizen der Ordnung n

$I_n = \Big[\delta_{ij}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Einheitsmatrix),	$J_n = \Big[\delta_{i,n-1-j}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Flipmatrix)
$U_n = \Big[\delta_{i,j+1}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Verschiebungsmatrix),	$\mathrm{diag}(c_i)_{i=0}^{n-1}$	(Diagonalmatrix)
$T_n = \Big[t_{i-j}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Toeplitzmatrix),	$H_n = \Big[h_{i+j}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Hankelmatrix)
$V_n = \Big[v_i^j\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Vandermondematrix),	$C_n = \Big[\frac{1}{b_j - c_i}\Big]_{i,j=0}^{n-1}$	(Cauchymatrix)

   (a) Zeigen Sie, dass $H_n = H_n^T,\ J_n^2 = I_n,\ J_n T_n J_n = T_n^T$ gilt.

   (b) Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen sowie deren Rangzerlegung (1)

   (b¹) $T_n U_n - U_n T_n$, **(HA)** (b²) $H_n U_n - U_n^T H_n$,

   (HA) (b³) $V_n U_n - \mathrm{diag}\big(v_i\big)_0^{n-1} V_n$,

   (b⁴) $C_n \mathrm{diag}\big(b_i\big)_0^{n-1} - \mathrm{diag}\big(c_i\big)_0^{n-1} C_n,\ c_i \neq b_j\ \forall_{i,j}$.

   (c) Seien T_n, H_n reguläre Matrizen. Welche Aussagen kann man dann über den Rang von $T_n^{-1}U_n - U_n T_n^{-1}$ und **(HA)** $H_n^{-1}U_n - U_n^T H_n^{-1}$ machen?

8. Klassifizieren Sie die Lage dreier Ebenen des $\mathbb{R}^3$,

$$E_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0),\ i = 1,2,3$$

   mit Hilfe der Ränge $r = \text{rang } A$, $r' = \text{rang } A'$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},\ A' = [\,A|d\,]\ .$$

   Verwenden Sie gegebenenfalls auch

$$r_{ij} = \text{ rang } \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{bmatrix},\ r'_{ij} = \text{ rang } \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \end{bmatrix} \quad i \neq j, i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

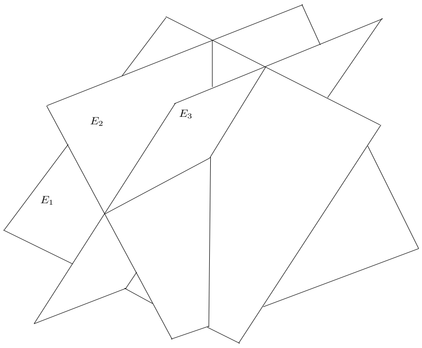
9. In $\mathbb{R}_n[t]$ seien die kanonische Basis $\mathcal{B}_1$ und die Basis

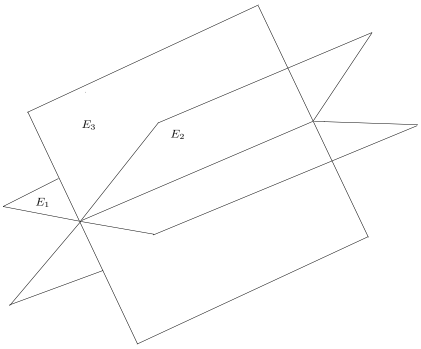
$$\mathcal{B}_2 = \{(t-\alpha)^j\}_{j=0}^n,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

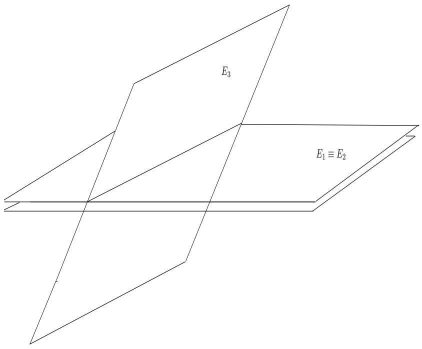
   gegeben.

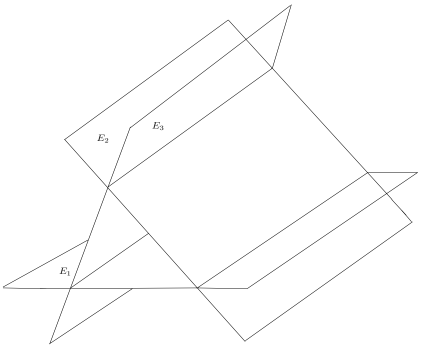
   (a) Geben Sie die Basistransformationsmatrizen an!

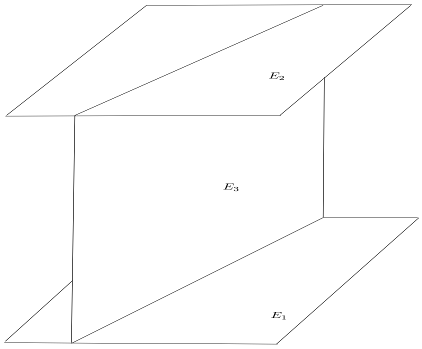
   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ in beiden Basen!

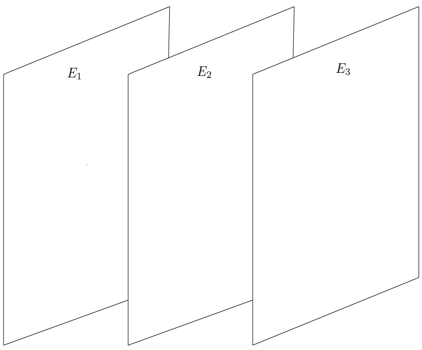


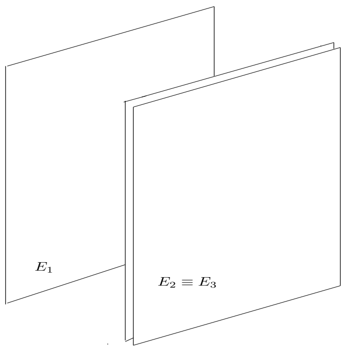


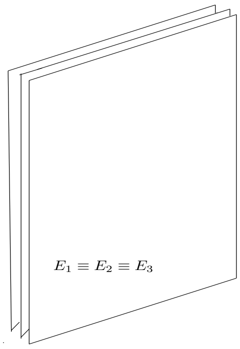












bitte wenden

13. Hausaufgabe

---

1. Wie ändert sich der Rang einer Matrix, wenn der Wert eines Elements geändert wird?
2. Man bestimme den Rang und die k-te Potenz folgender Matrizen ($k \in \mathbb{N}$)

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\operatorname{diag}\,(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}$, (c) $J_n = (\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1}^{n}$,

   (d) $U_n = (\delta_{i,j+1})_{i,j=1}^{n}$, (e) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.
3. Bestimmen Sie den Rang folgender (reeller) Matrizen

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
4. Analysieren Sie analog zur Aufgabe 8. der 13. Übung

   (a) die Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$,

   (b) die Lage zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$

   mit Hilfe von Rängen entsprechender Matrizen!
5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 13. Übung!

Zusatz: Zeigen Sie, dass folgende Matrizen aus $\mathbb{C}^{4\times 4}$ ähnlich sind, und geben Sie die Ähnlichkeitstransformation T an:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{z} \end{bmatrix}, \quad z = a + \mathbf{i}b\,.$$

(Hinweis: Man kann die Einträge von T aus $\{0, 1, -1, i, -i\}$ wählen!)