Lineare Algebra II

12. Übung – Determinanten, Inverse von Matrizen

---

1. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Determinante folgender reeller $n \times n$ Matrizen

$$\text{(a)} \quad A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad S_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad V(\lambda_{i-1})_1^n = \left[\lambda_i^j\right]_{i,j=0}^{n-1} \qquad \text{(d)} \quad \text{tridiag}(1,-2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1 \dots 1] \qquad \text{(f)} \quad A(a_i)_1^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1 \dots 1] + \text{diag}(a_i)_1^n$$

3. Seien $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der sogenannte Flip-Operator
   $$A : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_n, \dots, x_2, x_1)$$
   und $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der Operator der zyklischen Verschiebung
   $$B : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),$$
   $[A], [B]$ seien die Matrixdarstellungen in den Standardbasen.
   Berechnen Sie $\det[A]$ und $\det[B]$!

4. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

5. Eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen, heißt **Permutationsmatrix**. Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?

6. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **schiefsymmetrisch**, d.h. $A^T = -A$. Man zeige, dass $\det A = 0$ gilt, falls n ungerade ist.
   (Z) Gilt sogar, dass der Rang von A stets gerade ist?

7. Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Man zeige, dass das Produkt AB der Matrizen A und B genau dann **singulär** (d.h. nicht invertierbar) ist, wenn eine der beiden Matrizen A oder B singulär ist.

8. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, **(HA)** B^{-1} von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ mit Hilfe}$$

   (a) der **Adjunkten**,
   (b) des **Gauß-Jordan-Verfahrens**,
   (c) der **Cramerschen Regel**.
   (d) Bestimmen Sie die Lösungen x, **(HA)** y der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad By = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

9. Finden Sie alle Matrizen X, für die gilt:

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Lösen Sie die Matrizengleichung $AX = B$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine **orthogonale Matrix**, d.h. $A^{-1} = A^T$. Man zeige, dass $|\det A| = 1$.
    (b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine **unitäre Matrix**, d.h. $A^{-1} = \overline{A}^T$. Gilt auch $|\det A| = 1$?

12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n = e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Wir berachten die Matrix der **diskreten Fouriertransformation**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass F_n symmetrisch, sogar unitär ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $F_n^4 = I_n$ ist.
   (Z) Erläutern Sie am Beispiel der Fouriermatrix F_4 (und F_8) das Teile- und Herrsche-Prinzip zur Berechnung von $F_n x, x \in \mathbb{C}^n$, welches zur sogenannten **schnellen Fouriertransformation (FFT)** führt.

Zusatz 1: Für welche Matrizen $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $S_1 X = X S_1$, wenn S_1 die Matrix S_α mit $\alpha = 1$ aus Aufgabe 2 (b) ist?

Zusatz 2: Es sei $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ eine quadratische Matrix, wobei $E, F, G.H$ selbst Matrizen (E, H-quadratisch) passender Ordnung sind mit $\det E \neq 0$. Zeigen Sie, dass A genau dann **regulär** (d.h. invertierbar) ist, wenn die Matrix $A\backslash E := H - GE^{-1}F$ regulär ist, wobei $\det A = \det E \cdot \det A\backslash E$ gilt. ($A\backslash E$ wird **Schurkomplement** von E in A genannt.)

12. Hausaufgabe

1. Für welches φ (und θ) verschwinden die folgenden Determinanten?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\cot\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \tan\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 3 & \varphi & -2 & 8 \\ \varphi & 2\varphi-3 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & \theta & 8 \\ 5 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi \neq k\tfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Gegeben sei die folgende tridiagonale Matrix der Ordnung n:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\rho & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\rho & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\rho \end{bmatrix}.$$

   (a) Man zeige mit Hilfe des Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det A_n = 2\cos\rho \cdot \det A_{n-1} - \det A_{n-2}\,, \; n > 2\,.$$

   (b) Man zeige mittels vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(n\rho)$.

3. Lösen Sie folgendes (komplexes) Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -(1+\mathbf{i}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

   (a) mit Cramerscher Regel,

   (b) mit der inversen Koeffizientenmatrix.

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 12. Übung!