Lineare Algebra I

11. Übung – Permutationen, Gruppen

---

1. Zeigen Sie, dass die 4. Einheitswurzeln (d.h. die (komplexen) Lösungen von $z^4 = 1$) eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bezüglich der Multiplikation bilden!
   (a) Geben Sie alle erzeugenden Elemente an!
   (b) Geben Sie alle Untergruppen an und deren erzeugende Elemente!

2. (a) Geben Sie die Gruppentafel der symmetrischen Gruppe S_3 an!
   (b) Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_3 des gleichseitigen Dreiecks an, und zeigen Sie, dass diese isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist!

3. Schreiben Sie folgende Permutationen der S_4 als Produkt von Transpositionen auf

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \textbf{(HA)}\ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \textbf{(HA)}\ s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (HA) Welche der Permutationen ist gerade, welche ungerade?

4. Es seien die Gruppen $G_1 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ gegeben, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ ,\ x \to |x|$$

   ein surjektiver Homomorphismus ist.

5. Sei $\mathbb{R}_1[x]$ versehen mit der binären Operation $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (Komposition).
   (a) Ist $(\mathbb{R}_1[x], \circ)$ eine Gruppe? Wenn nicht, welche (nichttriviale) Teilmenge $\mathbb{P}_0$ bildet eine Gruppe?
   (b) **(HA)** Ist $(\mathbb{P}_0, \circ)$ kommutativ?
   (c) Ist $(\mathbb{P}_1, \circ)$ mit $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}_0, \circ)$?

6. Zeigen Sie, dass die primen Restklassen

   (a) modulo 8, (b) modulo 12, (c) **(HA)** modulo 5, (d) **(HA)** modulo 10

   abelsche Gruppen bezüglich der Multiplikation bilden, und geben Sie isomorphe Strukturen an!

7. Es G eine (multiplikative geschriebene) Gruppe. Zeigen Sie,
   (a) Dann gibt es in G genau ein neutrales Element e.
   (b) Das linksinverse Element ist eindeutig bestimmt und zugleich rechtsinverses, d.h. es gilt $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ und somit auch $(a^{-1})^{-1} = a$ für alle $a \in G$.
   (c) Für gegebene $a, b \in G$ besitzt die Gleichung $ax = b$ die eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$ und die Gleichung $ya = b$ die eindeutige Lösung $y = ba^{-1}$.
   (d) Beweisen Sie die Formel $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Zusatz: Sie kaufen ein Schiebepuzzle, welches sich im Idealzustand I befindet. Können Sie den Zustand J herstellen (ohne Zerstörung des Spielzeugs)?

Zustand I :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Zustand J :

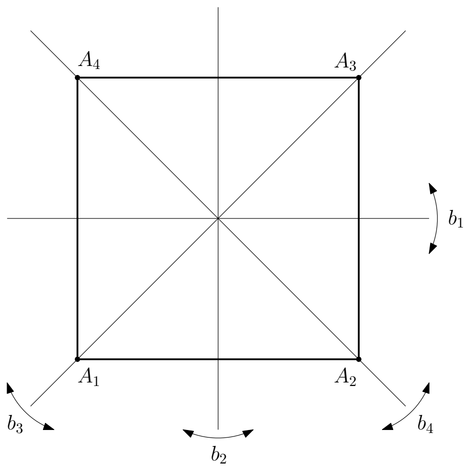
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

---

11. Hausaufgabe

1. Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_4 des Quadrates an und zeigen Sie, dass D_4 isomorph zu einer Permutationsgruppe der S_4 ist. Verwenden Sie die Bezeichnungen:



   b_0 identische Abbildung
   b_1, b_2, b_3, b_4 Spiegelung an den entsprechenden Geraden
   b_5, b_6, b_7 Drehungen entgegen dem Uhrzeigersinn:
   b_5 um $\frac{\pi}{2}$, $\quad b_6$ um π, $\quad b_7$ um $\frac{3\pi}{2}$

2. Geben Sie alle abelschen Untergruppen der D_3 und D_4 an.

3. Sei $S[0,1]$ die Menge aller bijektiven Abbildungen des Intervalls $[0,1]$ auf sich. Ist $S[0,1]$ versehen mit der Hintereinanderausführung einer Gruppe? Ist diese abelsch?

4. Zeigen Sie, dass die Menge M von Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_1 = t\,,\ f_2 = \frac{1}{t}\,,\ f_3 = -t\,,\ f_4 = -\frac{1}{t}$ bezüglich der Komposition eine abelsche Gruppe der Ordnung 4 bildet (Gruppentafel). Ist diese isomorph zur Z_4 oder V_4?

5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 11. Übung.