Lineare Algebra I

10. Übung – Koordinaten von Vektoren, Matrixdarstellungen

---

1. Geben Sie die Matrixdarstellung $[A]$ bezüglich der kanonischen Basen für folgende Operatoren an:

   (a) Operatoren der Aufgaben 8 (a), 8 (b), 8 (e) der 8. Übung,

   (b) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n-1}[t], (Af)(t) = f'(t)$,

   (c) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n+1}[t], (Af)(t) = tf(t)$,

   (d) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t], (Af)(t) = f(2t + 4)$,

   (e) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t], (Af)(t) = f(0)$,

   (f) **(HA)** $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, A(x_i)_{i=1}^n = c(x_i)_{i=1}^n$ ($c \in \mathbb{R}$ fixiert),

   (g) **(HA)** Operator f aus Aufgabe 4 der 8. Hausaufgabe.

2. In $\mathbb{R}_2[t]$ seien die folgenden Mengen von Polynomen gegeben:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, t, t^2\}\,, \\ B_2 &= \{1 + t, t - 1, t^2 + 2t\}\,, \\ B_3 &= \{2 + t - t^2, 2 - t + 2t^2, 3 + t^2\}\,. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass B_2 und **(HA)** B_3 Basen von $\mathbb{R}_2[t]$ bilden!

   (b) Geben Sie die Koordinaten des Polynoms $p(t) = 1 + t + t^2$ in den Basen B_1, B_2 an!

   (c) **(HA)** Geben sie die Koordinaten des Polynoms $p(t)$ in der Basis B_3 an.

   (d) Geben Sie für den linearen Operator

$$A : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t],\ (Ap)(t) = p(2t)$$

   die Matrixdarstellungen

   $[A]_{B_1,B_1}$, $[A]_{B_2,B_1}$, $[A]_{B_1,B_2}$, **(HA)** $[A]_{B_2,B_2}$, **(HA)** $[A]_{B_3,B_1}$

   an!

3. Geben Sie für den Differentialoperator $D : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ die Matrixdarstellung $[D]_{B,B}$ an, wobei B die folgende Basis des $\mathbb{R}_2[t]$ bezeichnet:

$$B = \{(t - 1)^2, t^2, (t + 1)^2\}\,.$$

10. Hausaufgabe

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 10. Übung!

2. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe die Matrixdarstellung

   $$[A]_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   wobei B_1, B_2 folgende Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnet:

   $$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Wie sieht die Matrixdarstellung von A bezüglich der kanonischen Basen E_1, E_2 des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ aus?

3. Geben Sie die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasen) des linearen Operators $A_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, der die Ebene (den $\mathbb{R}^2$) um den Winkel φ (im mathematisch positiven Sinn) um den Ursprung dreht!
   Wie sieht die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasen) der Spiegelung S an der Geraden $y = x$ aus?

   (Z) Wie sieht die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasen) der Spiegelung S_g an einer beliebigen Geraden g, die durch den Ursprung geht, aus?