Lineare Algebra I

9. Übung – Lineare Unabhängigkeit, lineare Hülle, Basis, Dimension

---

1. (a) Man zeige, dass die Elemente $a = [2, 1, 0]^T$ und $b = [1, 2, 0]^T$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (b) Man ergänze $\{a, b\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.
   (c) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

2. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraumes V. Bilden dann die Vektoren
   $b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3$ auch eine Basis von V?

3. Man zeige, dass

$$x_1 = [1, 2, 3, \cdots, n]^T, \quad x_2 = [0, 2, 3, \cdots, n]^T, \quad \cdots, \quad x_n = [0, 0, \cdots, n]^T$$

   eine Basis im $\mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie die Koordinaten des Vektors $v = [1, 2^2, 3^2, \cdots, n^2]^T$ in dieser Basis an!

4. Man finde zwei lineare Unterräume $U \subset \mathbb{K}^\infty$ und $V \subset \mathbb{K}^\infty$ so, dass gilt

$$\dim U = \infty, \ \dim V = \infty, \ \dim (U \cap V) = 3\,.$$

5. Man überprüfe ob folgende Funktionensysteme aus $\mathcal{F}[0, 1]$ linear unabhängig sind:
   (a) $\{1, e^x, e^{2x}\}$,
   (b) $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x\}$,
   (c) $\{1, \sin x, \cos x\}$.

6. Unter der **linearen Hülle** einer Teilmenge S eines linearen Raumes V versteht man die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen von Elementen aus S (Bezeichnung: $\mathrm{lin}S$).
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{lin}S$ ein linearer Unterraum von V ist.
   (b) Untersuchen Sie, ob folgendes gilt: Wenn S genau n linear unabhängige Elemente hat, dann gilt, $\dim \mathrm{lin}S = n$.

7. Für folgende Teilmengen $S \subset \mathbb{R}^3$ gebe man die lineare Hülle $\mathrm{lin}S$, eine Basis in $\mathrm{lin}S$ sowie die Dimension von $\mathrm{lin}S$ an:
   (a) $S = \{[1, 1, 1]^T\}$,
   (b) $S = \{[1, 2, 0]^T, \ [2, 1, 0]^T\}$,
   (c) $S = \{[1, 0, 1]^T, [0, 1, 0]^T, [1, 1, 1]^T\}$,
   (d) $S = \{[x, y, 0]^T : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1\}$,
   (e) $S = \{[1, 1, 0]^T, [-1, 1, 0]^T, [1, 1, 1]^T\}$.

8. Beweisen Sie den **Austauschsatz von E. Steinitz**:
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $\{v_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V und w ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Dann kann man w gegen einen der Basisvektoren austauschen, d.h. $\exists j$ mit $1 \leq j \leq n$ so, dass

$$v_1, v_2, \ldots v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots v_n$$

auch Basis von V ist.

9. Ist das Vektorsystem $\{[1,1,1,1]^T, [0,1,0,0]^T, [0,1,1,0]^T, [0,1,1,1]^T\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^4$? Wenn ja, welchen dieser Vektoren kann man gegen den Vektor $[1,0,0,0]^T$ austauschen, so dass wieder eine Basis entsteht?

10. Zeigen Sie, dass die linearen Räume $\mathbb{R}_n[t]$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind!

11. Seien $p_\pm(t) = 1 \pm t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. Bestimmen Sie die Dimension von

$$U = \operatorname{lin}\{p_+(t), p_-(t)\} \subset \mathbb{R}_2[t]$$

sowie eine Basis von U.

12. Welche Dimension hat der Unterraum P von $\mathbb{R}_n[t]$ $\quad(n > 2)$:

$$P = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(0) = p(1) = 0\}\,?$$

13. Man finde eine Basis der Unterräume

    (a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ des $\mathbb{R}^3$,

    (b) $U = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : p(1) = 0\}$ des $\mathbb{R}_2[t]$.

Zusatz 1:

Geben Sie die Koordinaten des Polynoms $p(t) = t^3 + t^2 - t - 1 \in \mathbb{R}_3[t]$ in der Basis $\{p_j(t)\}_{j=0}^3$ an, wobei $p_j(t) = (t-1)^j$!

Zusatz 2:

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} G_n &= \{f \in \mathbb{R}_n[x] : f(-x) = f(x)\}\,, \\ U_n &= \{f \in \mathbb{R}_n[x] : f(-x) = -f(x)\}\,, \end{aligned}$$

zwei lineare Unterräume von $\mathbb{R}_n[x]$ sind. Bestimmen Sie deren Dimension!
Zeigen Sie, dass jedes Element $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ auf eindeutige Art und Weise als Summe

$$p(x) = g(x) + u(x)$$

mit $g(x) \in G_n$ und $u(x) \in U_n$ dargestellt werden kann.

9. Hausaufgabe

---

1. Es seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sowie $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Man zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}^2$ eine Linearkombination von g_1 und g_2 ist.
   (b) Stellen Sie die Vektoren $e_1 + 2e_2$ und $e_1 - 2e_2$ in der Basis $\{g_1, g_2\}$ dar.

2. Seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Man zeige, dass $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bildet und gebe die Koordinaten des Vektors $x = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]^T$ in dieser Basis an.
   (b) Ist das System $\{g_1, g_1 + g_2, g_2 + g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, wie sehen die Koordinaten von x in dieser Basis aus?

3. Es seien $a = [\ 1\ \ 2\ \ 3\ ]^T$ und $b = [\ 3\ \ 2\ \ 1\ ]^T$.
   (a) Man ergänze die Vektoren a und b zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.
   (b) Geben Sie alle Vektoren $c \in \mathbb{R}^3$ an, die zusammen mit a und b eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

4. Für folgende Teilmengen $S \subset \mathbb{R}^3$ gebe man die lineare Hülle S an, bestimme deren Dimension sowie eine Basis:
   (a) $S = \{[x, 0, 0]^T : x \in \mathbb{Z}\}$, (b) $S = \{[x, y, 0]^T : x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 0\}$.

5. Man ersetze ein Element der Basis $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$ des $\mathbb{R}^3$ durch ein anderes Element, so dass wieder eine Basis entsteht und der Vektor $[2, 1, 0]^T$ die Koordinaten $\{1, 0, 0\}$ bezüglich der neuen Basis hat.

6. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass
   (a) $[1 + \alpha, 2]^T, [1, 2 + \alpha]^T$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ ist,
   (b) $[\alpha^2, 4, 9]^T, [\alpha, 2, 3]^T, [1, 1, 1]^T$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist.

7. Man bestimme die lineare Hülle folgender Polynome aus $\mathbb{R}_2[t]$
   $$p_1(t) = 1 - t^2, p_2(t) = t - t^2, p_3(t) = 2 - t - t^2$$
   und gebe deren Dimension an!

8. Geben Sie zwei verschiedene Basen in $\mathbb{R}^4$ an, die $[1, 1, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 1]^T$ enthalten.

9. Beschreiben Sie alle Unterräume des $\mathbb{R}^3$.