Lineare Algebra I

8. Übung – Lineare Räume, lineare Operatoren

---

1. V_o sei die Menge aller Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ in der Ebene. Welche der folgenden Teilmengen von V_o bilden lineare Räume über $\mathbb{R}$?
   (a) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt auf einer gegebenen Geraden$\}$,
   (b) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt im ersten Quadranten$\}$,
   (c) **(HA)** $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt im ersten oder dritten Quadranten$\}$.

2. In der Menge aller positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ wird wie folgt eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ eingeführt:
   $$x \oplus y = xy, \;\; \alpha \odot x = x^\alpha \;\; (x, y \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R})\,.$$
   Man zeige, dass $\mathbb{R}_+$ auf diese Weise zu einem linearen Raum wird.

3. Ist $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Operationen
   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \;\; \lambda(x, y) = (\lambda x, y)$$
   ein linearer Raum über $\mathbb{R}$?

4. Sei $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper der Restklassen mod 2. Im **Koordinatenraum** K^n über K werden folgende Operationen definiert
   $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$
   $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\gamma x_1, \gamma x_2, \cdots, \gamma x_n) \quad (\gamma \in K)$.
   (a) **(HA)** Man zeige, dass K^n ein linearer Raum ist!
   (b) Man zeige, dass $a + a = 0 \quad \forall a \in K^n$ gilt!
   (c) Wieviel Elemente hat K^n?

5. Eine Teilmenge U eines linearen Raumes V heißt **linearer Unterraum** von V, wenn U selbst ein linearer Raum ist bzgl. der in V definierten Operationen.
   Sei $\mathcal{P}$ der lineare Raum aller Polynome mit komplexen Koeffizienten. Welche der folgenden Mengen sind lineare Unterräume von $\mathcal{P}$?
   (a) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 0\}$, (b) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 1\}$, (c) $\{p \in \mathcal{P} : 2p(0) - 3p(1) = 0\}$,
   (d) **(HA)** $\{p \in \mathcal{P} : p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = 0\}$ $k \in \mathbb{N}$ fest.

6. Seien a, b, c, d beliebige reelle Zahlen. Man zeige,
   (a) dass die Menge aller Lösungen (x, y) des Gleichungssystems
   $$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$
   einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!

(b) **(HA)** dass die Menge aller Zahlenpaare (u, v) für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!

7. (a) **(HA)** Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist (Bezeichnung $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$).

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $M_{2\times 2}$ aller reellen 2×2 Matrizen der Form

   $$C_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

   einen linearen Unterraum des Vektorraumes aller reellen 2×2 Matrizen bilden.

   (c) Finden Sie einen Vektorraum-Isomorphismus $\varphi : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to M_{2\times 2}$!

   (Z) Bildet $M_{2\times 2}$ versehen mit Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper?

8. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind. (Die linearen Räume $\mathbb{K}_n[t], \mathcal{F}(a, b)$ wurden in der Vorlesung eingeführt!)

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1;\ A(x, y, z) = x + 2y + 3z$,
   (b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ A(x, y) = (x + y, x - y)$,
   (c) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; A(x_i)_{i=1}^n = (|x_i|)_{i=1}^n$,
   (d) $A : \mathcal{P} \to \mathcal{P};\ (Af)(t) = tf(t)$,
   (e) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{2n}[t];\ (Af)(t) = f(t^2)$,
   (f) $A : \mathcal{P} \to \mathcal{P};\ (Af)(t) = f(2t + 4)$,
   (g) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]; (Af)(t) = f'(t)$,
   (h) $A : \mathcal{F}[0, 1] \to \mathcal{F}[0, 1]; (Af)(t) = f(0)$.

9. Welche der Operatoren aus Aufgabe 8 sind Vektorraum-Isomorphismen?

10. Sei V linearer Vektorraum, $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Gilt $A^2 \in \mathcal{L}(V, V)$, wobei

    $$A^2x = A(Ax),\ x \in V\,?$$

---

8. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 8. Übung!

2. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind.

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; A(x, y, z) = a \ \ (a \in \mathbb{R}^3$ konst.),
   (b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; A(x, y, z) = (x, y, z) + a$,
   (c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1;\ A(x, y, z) = x^2 + 2y$,
   (d) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; A(x_i)_{i=1}^n = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, 0, \dots, 0\right),\ a_i \in \mathbb{R}$.

3. Sind die folgenden Teilmengen U_1, U_2 des $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$?

   $$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}\,; \\ U_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 1, x_3 + x_4 = 2\}\,. \end{aligned}$$

4. Untersuchen Sie, ob die Abbildung

   $$f : \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}^3,\ at^2 + bt + c \to (a - c, b - c, a + c)$$

   ein Vektorraum-Isomorphismus ist!