Lineare Algebra I

7. Übung – Komplexe Zahlen

---

1. Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$, (b) $\dfrac{(1-\mathbf{i})^5-1}{(1+\mathbf{i})^5+1}$, (c) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$.

2. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) -1, (b) $2-2\mathbf{i}$, (c) $(1+\mathbf{i})^3$, (d) $\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$, (e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$,

   (f) $\dfrac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^5}{(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^5}$, (g) $\dfrac{\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi}{\cos\varphi-\mathbf{i}\sin\varphi}$, (h) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

   Berechnen Sie die vierten Potenzen dieser Zahlen sowohl unter Verwendung der binomischen Formel als auch unter der Verwendung der Formel von Moivre.

3. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z=\dfrac{1}{\bar{z}}$, (b) $\mathrm{Re}(z^2)=1$, (c) $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})=c$, (d) $|\frac{1}{z}|\leq 3$,

   (e) $2<|z|<4$, (f) $|z-z_0|=|z-z_1|$, (g) $|z+3|+|z-3|\leq 10$,

   wobei $c\in\mathbb{R}$ und $z_0,z_1\in\mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

4. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^4+1=0$, (b) $z^3+2=2\mathbf{i}$, (c) $z^4=-8+8\sqrt{3}$, (d) $z^2=-3-4\mathbf{i}$,

   (e) $z^4-2\mathbf{i}z^2+2\mathbf{i}=1$, (f) $z^2+4\mathbf{i}z+5=0$, (g) $|z|-z=1+2\mathbf{i}$.

5. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z,w\in\mathbb{C}$ die Beziehung

   $$2(|z|^2+|w|^2)=|z-w|^2+|z+w|^2$$

   gilt.

6. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung

   $$z^n=1,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

7. Zeigen Sie, dass für $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ mit $\alpha,n\alpha\notin\{(k+\frac{1}{2})\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ die folgende Beziehung gilt:

   $$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+\mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1-\mathbf{i}\tan(n\alpha)}\,.$$

8. Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ ($n\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\mathbb{R}$) mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

9. Das Polynom
$$p(z) = z^5 - 10z^4 + 64z^3 - 176z^2 + 228z - 136$$
hat die Nullstellen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3 + 5\mathbf{i}$. Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von $p(z)$!

Zusatz: Lösen Sie die Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin \frac{2\pi}{5}$ und $\cos \frac{2\pi}{5}$.

---

7. Hausaufgabe

1. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \overline{z}$, (b) $z = \mathbf{i}\overline{z}$, (c) $\operatorname{Im}(z^2) = 1$, (d) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$ und $|\operatorname{Re} z| < 1$,
   (e) $|z| < 1 + \operatorname{Re} z$.

2. Sei $z = \dfrac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

3. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^5 = 1$, (b) $z^3 - \mathbf{i} = 0$, (c) $z^6 = 64$, (d) $\overline{z}^3 = -8$,
   (e) $\mathbf{i}z^2 - 2z - \mathbf{i} + 1 = 0$, (f) $(z - 3\mathbf{i})^6 + 64 = 0$, (g) $\overline{z} = z^3$, (h) $z^2 + 4\mathbf{i}z = 5$.