Lineare Algebra I

5. Übung – Funktionen

---

1. Geben Sie für folgende Situationen alle Abbildungen $f : I \to M$ an und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $I = \{a_1, a_2\}, M = \{1, 2\}$, (b) $I = \{a\}, M = \{l, m, n\}$, (c) $I = \{a, b\}, M = \{3\}$.

2. Es sei in der Menge M der Menschen (die einmal gelebt haben bzw. noch leben) eine Vorschrift $y = \gamma(x)$ gegeben durch

   (a) y ist Vater von x, (b) y ist Sohn von x, (c) y ist Großvater von x,
   (d) y ist älteste Tochter von x.

   Ist γ eine Funktion von M in M?

3. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $X = Y = \mathbb{R}, \ x \mapsto e^x$
   (b) $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty), \ x \mapsto e^x$
   (c) $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$
   (d) $X = Y = \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin x$
   (e) $X = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}, Y = \mathbb{R}, \ x \mapsto \tan x$
   (f) $X = Y = \mathbb{N}, \ n \mapsto n^2$
   (g) $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{Q}, \ n \mapsto \frac{1}{n}$
   (h) $X = Y = \mathbb{R}, \ x \mapsto |2x - 4|$

   Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen X_1 und Y_1 von X bzw. Y an, so dass $f : X_1 \longrightarrow Y_1$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : Y_1 \longrightarrow X_1$.

4. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

   (a) Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (d) Geben Sie ein Beispiel für $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

5. Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) $f : X \longrightarrow Y$ ist injektiv.
   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \ \forall A, B \subset X$.
   (c) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
   (d) $f^{-1}(f(A)) = A \ \forall A \subset X$.
   (e) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \supset B$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Beweisen Sie: Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ injektiv bzw. surjektiv, so gilt dies auch für $g \circ f : A \longrightarrow C$. Kann man für die entsprechenden Aussagen die Bedingungen an f und/oder g abschwächen?

7. Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt. Mit $\langle a, x \rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt der Vektoren a und $x \in \mathbb{R}^3$. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ x \mapsto \langle a, x \rangle\, x$ injektiv bzw. surjektiv?

5. Hausaufgabe

---

1. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $x \mapsto |\sin x|$, (b) $x \mapsto x^2 - 2x$, (c) $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, (d) $x \mapsto 2^{|x|}$.

   Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ an, so dass $f : A \longrightarrow B$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

2. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $A_1, B_1 \subset Y$.

   (a) Zeigen Sie: Aus $A_1 \subset B_1$ folgt $f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(B_1)$.

   (b) Überprüfen Sie die beiden Inklusionen

   $$f(f^{-1}(A_1)) \subset A_1 \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(A)) \supset A\,.$$

   Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an, dass i.a. keine Gleichheit gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A_1 \cap B_1) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(B_1)$ gilt.

3. Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(z, w) \mapsto (az + b, cw + d)$ surjektiv, injektiv, bijektiv?

4. Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $F : A \longrightarrow A \times B$, $x \mapsto (x, f(x))$ stets injektiv ist.

5. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Man finde zwei Funktionen $f : M \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow M$, für die $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

6. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 5. Übung.

Zusatz 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grade n, für das $f(k) = \frac{k}{k+1}$ gilt bei $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Geben Sie $f(n + 1)$ an!

Zusatz 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ den beiden Bedingungen

(1) $f(x + 19) \leq f(x) + 19$,

(2) $f(x + 94) \geq f(x) + 94$,

genügt. Zeigen Sie, dass dann

$$f(x + 1) = f(x) + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zusatz 3: Bestimmen Sie alle Polynome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Gleichung $f(x^2) = f(x)f(x - 1)$ genügen!