Lineare Algebra I

4. Übung – Vektoren, analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Vereinbarung: Unter $\vec{x}$ verstehen wir den Ortsvektor von x, d.h. $\vec{x} = \overrightarrow{Ox}$, $|\vec{x}|$ bezeichnet die Länge des Vektors $\vec{x}$.

1. Es seien
   (a) $a = [\,2 \;\; 3 \;\; 0\,]^T,\ b = [\,0 \;\; 3 \;\; 2\,]^T$,
   (b) **(HA)** $a = [\,1 \;\; 0 - 3\,]^T,\ b = [\,6 \;\; 4 - 3\,]^T$.

   Man berechne $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $(\vec{a},\, \vec{b})$, $\vec{a} \times \vec{b}$, den Flächeninhalt des Parallelogrammes, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, sowie eine normierte Richtung $\vec{c}$, die senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

2. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren der Länge 1, die einen Winkel von 30^o einschließen. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

3. Existieren Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die gleichzeitig die Eigenschaften $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 4$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = 30$ besitzen?

4. (a) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$ senkrecht stehen.
   (b) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$ und $\vec{b}$ mit $b = [\,0 \;\; -1 \;\; 1\,]^T$ senkrecht stehen.

5. Gibt es einen Vektor, der mit den Vektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ je einen Winkel von 45^o einschließt?

6. Man beweise: Ist $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, so gilt $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

7. Wiederholen Sie den Begriff Hessesche Normalform einer Ebene E. Wie bestimmt man mit dieser den Abstand eines Punktes P von E?
   (Ohne Beweis, da Verallgemeinerung der Darlegungen aus der Vorlesung!)

8. Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$. Diese heißen **windschief**, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind!
   Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass g_1 und g_2 windschief sind! (Verwenden Sie dazu den Begriff des Kreuzproduktes!)

9. Stellen Sie ein Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) auf, welches den Abstand zweier windschiefer Geraden liefert sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.

10. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide habe die Eckpunkte $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0)$ und $C(0, 0, 6)$. Der Punkt $D(2, 3, 8)$ sei die Spitze der Pyramide. Man berechne
    (a) den Inhalt der Grundfläche,
    (b) die Höhe der Pyramide,
    (c) den Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundfläche und
    (d) das Volumen der Pyramide.

11. Die Ebene E enthalte die Punkte $A(1, 4, 0), B(-1, 2, 3)$ und $C(1, 0, 0)$. Man berechne

(a) eine Parametergleichung von E,

(b) eine parameterfreie Gleichung von E,

(c) **(HA)** die Gleichung von E in Hessescher Normalform,

(d) **(HA)** den Abstand des Punktes $P(2,-1,-3)$ von E,

(e) **(HA)** den Fußpunkt des Lotes von P auf E und

(f) den Schnittpunkt von E mit der Geraden

$$g = \left\{ [-2 \ -4 \ \ 3]^T + t[1 \ \ 2 \ -1]^T : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

12. Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2 : E_1 liegt parallel zur Ebene $x + 2y + 2 = 0$ und enthält den Punkt $P(2, 5, -6)$. E_2 enthält die Punkte $Q(1, 0, 1), R(-1, -2, 1)$ und $S(4, 1, 2)$. Man bestimme

    (a) die Ebenengleichungen von E_1 und E_2,

    (b) die Schnittgerade von E_1 und E_2.

13. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen

$$E_1 : 2x + y + z - 4 = 0 \ \text{ und } \ E_2 : x + 2y - z + 3 = 0 .$$

14. Berechnen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

4. Hausaufgabe

---

1. Seien $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4$ und $\vec{a}, \vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

2. Gegeben seien $a = [3 \ \ 0 \ -1]^T, b = [-3 \ \ 0 \ \ 1]^T, c = [1 \ \ 2 \ -2]^T, d = [0 \ \ 0 \ \ 1]^T$ und $e = [1 \ \ 2 \ \ 0]^T$. Man berechne $(\vec{a}, \vec{c} \times \vec{d})$ sowie $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{e} \times \vec{d}$.

3. Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $a = [-1 \ \ 3 \ \ 3]^T, b = [0 \ \ 4 \ \ 2]^T$ und $c = [3 \ \ 1 \ -4]^T$ in einer gemeinsamen Ebene? Liegen die Punkte a, b, c auf einer Geraden?

4. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden!

5. Welchen Abstand hat der Punkt $P(16, -9, 7)$ von der Ebene durch die Punkte $A(1, 4, 2), B(0, -2, 1)$ und $C(2, 1, -1)$? In welchen Punkten schneidet diese Ebene die Koordinatenachsen?

6. Man bestimme die Gleichungen der Ebenen, die parallel zur Ebene $2x + 2y + z - 8 = 0$ liegen und von ihr den Abstand 4 haben.

7. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

    sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.

8. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung.