Lineare Algebra I

3. Übung – Relationen

---

1. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, \quad R_2 = \{(4,4)\} \cup R_1, \quad \textbf{(HA)}\ R_3 = R_2 \cup \{(1,3)\}, \\ R_4 &= R_3 \cup \{(3,1)\}, \quad \textbf{(HA)}\ R_5 = R_4 \cup \{(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)\}, \\ R_6 &= R_2 \cup \{(2,3),(3,2),(1,2),(2,1)\}. \end{aligned}$$

   (a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?

   (b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.

   (c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

   (d) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen, die als Faktormenge $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ haben.

2. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch

   (a) $X = \mathbb{N},\ mR_an :\Leftrightarrow m + n$ gerade,
   (b) **(HA)** $X = \mathbb{N},\ mR_bn :\Leftrightarrow m + n$ ungerade,
   (c) $X = \mathbb{N},\ mR_cn :\Leftrightarrow |m - n| \leq 2$,
   (d) $X = \mathbb{N},\ mR_dn :\Leftrightarrow \frac{m}{n}$ Potenz von 2 mit ganzzahligen Exponenten,
   (e) $X = \mathbb{N},\ mR_en :\Leftrightarrow m|n$,
   (f) $X = \mathbb{R},\ xR_fy :\Leftrightarrow e^x = e^y$,
   (g) $X = \mathbb{R},\ xR_gy :\Leftrightarrow x^2 = y^2$,
   (h) $X = \mathbb{Z},\ aR_hb :\Leftrightarrow 4|(a - b)$,
   (i) **(HA)** $X =$ Menge aller Schüler einer Stadt,
   $aR_ib :\Leftrightarrow a$ besucht die gleiche Schule wie b,
   (j) X-beliebiges Mengensystem,
   $aR_jb :\Leftrightarrow a$ ist echte Teilmenge von b,
   (k) $X = \mathbb{N}, aR_kb :\Leftrightarrow a \cdot b$ ungerade,
   (l) **(HA)** $X = \mathbb{N}, aR_lb :\Leftrightarrow a \cdot b$ gerade,
   (m) $X =$ Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$, $gR_mh :\Leftrightarrow g\|h$,
   (n) $X =$ Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^3$, $gR_nh :\Leftrightarrow g\perp h$,
   (o) $X =$ Menge der Menschen, $\widehat{☺}\ R_o\ \widetilde{☹} :\Leftrightarrow \widehat{☺}$ liebt $\widetilde{☹}$,
   (p) $X = \mathbb{R},\ xR_py :\Leftrightarrow x \geq y$,
   (Z) $X = \mathbb{N},\ aRb :\Leftrightarrow a$ hat die gleichen Primteiler wie b.

3. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Äquivalenzrelationen?
   Wie sieht die Faktormenge aus?

4. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Ordnungsrelationen?

5. Ist $\{X_n\}_{n\in I}$ eine Klasseneinteilung von $\mathbb{R}$? Wenn ja, dann geben Sie die dazugehörige Äquivalenzrelation an!

   (a) $X_n = (n-1, n)$, $I = \mathbb{Z}$,
   (b) **(HA)** $X_n = [n-1, n]$, $I = \mathbb{Z}$,
   (c) $X_n = [n-1, n)$, $I = \mathbb{Z}$,
   (d) $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in [n-1, n)\}$, $I = \mathbb{N}$,
   (e) **(HA)** $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (n-1, n]\}$, $I = \mathbb{N}$.

6. Zeigen Sie, dass folgende Relation auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1b_2 = b_1a_2\,.$$

   Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

7. Folgt aus der Symmetrie und Transitivität einer Relation deren Reflexivität? (Begründung!)

8. Sei M eine (endliche) Menge mit vier Elementen.

   (a) Wieviel Relationen kann man auf M definieren?
   (b) Wieviel Äquivalenzrelationen kann man auf M definieren?
   (Z) Wie sehen die Resultate für eine beliebige endliche Menge aus?

3. Hausaufgabe

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 3. Übung. (Bei Aufgaben 2 (b), (i) und (l) beantworten Sie bitte auch die Fragen von Aufgaben 3 und 4.)

2. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:

(a)	$X = \mathbb{R}$,	$xRy :\Leftrightarrow \lvert\cos x\rvert = \lvert\cos y\rvert$
(b)	$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,	$(a,b)R(c,d) :\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$
(c)	$X = \mathbb{R}^n$,	$(x_j)_{j=1}^n R(y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \le y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$
(d)	$X =$ Potenzmenge von Menge M,	$xRy :\Leftrightarrow x \subset y$,
(e)	$X = \mathbb{R}$	$xRy :\Leftrightarrow 5 \mid (x-y)$.

   Geben Sie gegebenenfalls die Faktormenge an!

3. Man untersuche, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind:

   (a) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad R = \{(a,b) : a - b \text{ ist rational}\}$,
   (b) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad R = \{(a,b) : a + b \text{ ist rational}\}$,
   (c) $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $R = \{((a,b),(c,d)) : a + d = b + c\}$.

4. Die Menge der Dreiecke wurde in

   (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
   (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige (nicht gleichseitige)

   eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben? (Begründung!)