Lineare Algebra I

1. Übung – Wiederholung

---

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
   (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (e) $||x| - |y|| \leq |x - y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (f) **(HA)** $||y - x| - |z - y|| \leq |x - z| \;\; \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Sei $a \geq 0$ fixiert und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x| \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$ gilt.

3. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

4. Veranschaulichen Sie in der xy-Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

5. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,\ \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1\,,$$

   und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta\,,$$

   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:
   (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha$,
   (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,
   (c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$,
   (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
   (e) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$,
   (f) **(HA)** $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

6. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:
   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
   (b) **(HA)** $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
   (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fixiert),
   (d) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

7. Man löse folgende Ungleichungen:

   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,

   (c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

8. Seien m, n, k natürliche Zahlen. Sind folgende Aussagen wahr:

   (a) Wenn k die Zahl m teilt ($k|m$) und m die Zahl n teilt ($m|n$) dann gilt $k|n$.

   (b) Wenn $k|m$ und $k|n$ gilt, dann folgt $k|(m+n)$.

   (c) Wenn k das Produkt $m \cdot n$ teilt, dann teilt k die Zahl m oder die Zahl n.

   (d) Wenn m und n den Rest r bei Division durch k lassen, dann lässt $m+n$ auch den Rest r.

   (e) **(HA)** Gelten die Aussagen (b) und (d) für das Produkt $m \cdot n$?

   Falls die Aussagen im allgemeinen nicht gelten, geben Sie Bedingungen für deren Gültigkeit an!

9. Gibt es unendlich viele Primzahlen? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Zusatz: Beweisen Sie: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann existiert genau ein positiver größter gemeinsamer Teiler $d = ggT(a_1 \ldots a_n)$ dieser Zahlen. Dieser läßt sich in der Form

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \text{ mit } x_i \in \mathbb{Z}$$

darstellen. (Literatur: z.B. Kochendörffer: Einführung in die Algebra)

1. Hausaufgabe

---

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

   (a) $\pm x \leq |x|$, (b) $|x| = |-x|$.

2. Machen Sie den Nenner rational:

   (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, (c) $\frac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen (kgV) der Zahlen a_1, a_2:

   (a) $a_1 = 240, a_2 = 500$, (b) $a_1 = 36, a_2 = 25$,

   (c) $a_1 = 81, a_2 = 9$, (d) $a_1 = 306, a_2 = 205$.

4. Lösen sie alle mit HA gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung!

Zusatz: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

(a) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1$, (b) $\sin x + \cos x = 1$,

(c) $\lg(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x + \frac{1}{4}\lg 4}$, (d) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1$.