Analysis I – Weihnachtsübung (Metriken)

1. Was kennzeichnet den Begriff des Abstandes und wie könnte man diesen verallgemeinern? Übertragen Sie die Begriffe Cauchyfolge, Konvergenz und Stetigkeit auf diese Verallgemeinerung.

2. Untersuchen Sie die Eigenschaften aus Aufgabe 1 bei den folgenden Funktionen.

   (a) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n$

   (b) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n$

   (c) $d_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n$

   (d) $d_P(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & : x \text{ und } y \text{ liegen auf einer Geraden durch } P \\ d_2(x,P) + d_2(y,P) & : \text{sonst,} \end{cases}$
   $P \in \mathbb{R}^2$ beliebiger, fester Punkt (Paris)

   (e) $d(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad x,y \in X,\ X$ beliebige Menge

   (f) $d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad d_\infty(f,g) = \max |f(x) - g(x)|,$
   $f,g \in C[a,b],\ p \in [1,\infty)$

   (Z) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ d(z,w) = \dfrac{|z-w|}{|1 - \overline{z}w|}$

3. Skizzieren Sie für die in (a) bis (c) der Aufgabe 3 definierten Funktionen und $n = 2$ die Menge

$$B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,0) \le 1\}.$$

4. Berechnen Sie mit der Metrik aus Aufgabe 3 (Z) $d(z,w)$ für $z \in \mathbb{D}$ und $w \to \tau \in \partial\mathbb{D}$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

5. Zeigen Sie: Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \ge 0} \subset (C[a,b], d_\infty)$, so konvergiert sie auch in $(C[a,b], d_1)$. Gilt auch die Umkehrung?