Analysis II

11. Übung – Potenzreihen, Taylor-Entwicklung

---

1. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und geben Sie den Konvergenzkreis an:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\mathbf{i}z}{n}\right)^n$ (b) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\mathbf{i}n)^n z^n}{n!}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n bezeichnet,

   (d) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^2}$ $(a \neq 0,\ a \in \mathbb{C})$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a > 0)$

   (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\vartheta(n)}(1-z)^n}{n}$, wobei $\vartheta(n)$ die Anzahl der Dezimalziffern der Zahl n bezeichnet,

   (h) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i})^n z^{2n}}{n!}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$

   (k) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{\ln n} z^n$ (l) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n (z - \mathbf{i})^n$

2. Die Potenzreihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 haben. Geben Sie Abschätzungen für den Konvergenzradius R der folgenden Reihen an:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ (b) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

3. Geben Sie für folgende Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den Konvergenzbereich an. Verwenden Sie dazu bekannte Taylorreihen!

   (a) $f(z) = e^{-z^2}$, $z_0 = 0$ (b) $f(z) = a^z := e^{z \ln a}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \pi$ $(a > 0)$

   (c) $f(z) = \sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z_0 = 0$, **(HA)** $z_0 = \pi$ (d) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 2$

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$, $z_0 = 0$, **(HA)** $z_0 = 1$ (f) **(HA)** $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$

4. Man berechne die Summe folgender Potenzreihen mittels bekannter Taylorreihen:

   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

   Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Berechnung richtig?

5. Man gebe für folgende Funktionen die Taylorentwicklung bis $(x - x_0)^n$ und das Restglied $R_n(f; x_0, x)$ nach Lagrange an:

   (a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, x_0 = 1, n = 3,$

   (b) $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x - x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (c) $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$

   (Z) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (Literatur: Fichtenholz, Band II, Nr. 449)

6. Man schätze den Fehler ab, der bei folgenden Näherungen entsteht:

   (a) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $0 \leq x \leq 1$ (b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

---

11. Hausaufgabe

1. Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \ln \cos x$ im Punkt $x_0 = 0$ bis $n = 3$ und das Restglied $R_3(f; 0, x)$ in der Lagrange'schen Form an.

2. Berechnen Sie näherungsweise

   (a) $\sqrt[3]{30}$, (b) $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

   mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2ten Grades, und schätzen Sie den Fehler ab. (Wählen Sie einen günstigen Entwicklungspunkt x_0!)

3. Man schätze den Fehler ab, der bei der Näherung $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ entsteht.

4. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 11. Übung.

Zusatz 1: Ermitteln Sie die n-te Ableitung von $f_n(x) = x^{n-1} e^{x^{-1}}$.

Zusatz 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arctan x$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(0)$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$?

(c) Zeigen Sie: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.

Zusatz 3: Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x \cos x$ mit Hilfe

(a) der Ableitungen, (b) von Reihenmultiplikation.