Analysis II

10. Übung – Ableitungen, Extremwerte, Regel von l'Hospital

---

1. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit, und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$, (b) $f(x) = |x|$,

   (c) **(HA)** $f(x) = \cos x$ (d) $f(x) = 2^{|x|}$.

2. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar sind). Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   (a) $y = x^3(x^2-1)^2$, (b) **(HA)** $y = \dfrac{x}{1-x^2}$,

   (c) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, (d) **(HA)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

   (e) **(HA)** $y = 2^{\sin 3x}$, (f) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$,

   (g) **(HA)** $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (h) **(HA)** $y = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$,

   (i) $y = a^{(a^x)}$ $(a > 0)$, (j) $y = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

   (k) $y = x^x$, (l) **(HA)** $y = x^{\sin x}$.

3. Berechnen Sie die n-te Ableitung:

   (a) $y = e^{-ax}$, (b) **(HA)** $y = a^x$,

   (c) $y = \ln x^2$, (d) **(HA)** $y = \ln(ax+b)$.

4. Man prüfe, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $y = y(x)$ gegeben durch

   (a) **(HA)** $y = ax + be^x + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-x}$,

   (b) $y = a(1+x^2) + b(x + (1+x^2)\arctan x)$

   der Differentialgleichung $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ genügt.

5. Bestimmen Sie, in welchen Intervallen $f(x)$ monoton ist und wo die Extremwerte von $f(x)$ liegen:

   (a) $f(x) = 2x^2 - x^4$,

   (b) **(HA)** $f(x) = xe^{-x}$.

6. Welches Rechteck mit den Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, das in die Ellipse einbeschrieben ist, besitzt den grössten Flächeninhalt?

7. Das „Jüngste Gericht" – eines der Hauptwerke von Michelangelo (1475 – 1564) – schmückt die Altarwand der Sixtinischen Kapelle in Rom. Das Fresko ist annähernd rechteckig, etwa 10 m breit und 12 m hoch. Zwei Meter tiefer als der untere Rand des Gemäldes möge sich das Auge eines Kunstliebhabers befinden. Welchen Ort in der Kapelle sollte er als einen günstigen Standpunkt zur Betrachtung des Kunstwerkes wählen?

8. (a) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von $f(x) = 3x - x^3$ für $x \in [-2, 3]$.

   (b) Gilt bei $|x| < 2$ die Ungleichung $|3x - x^3| \leq 2$?

9. Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$$

   (a) die Unstetigkeitsstellen,

   (b) **(HA)** die Nullstellen und die Extrema,

   (c) die Asymptoten,

   (d) die Wendepunkte,

   (e) alle Intervalle, wo f konvex bzw. konkav ist.

10. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = \dfrac{2k+1}{4}\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} & : \ \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Ist dies eine gerade Funktion? Ist sie periodisch? Geben Sie Extremwerte und Asymptoten an !

11. Beweisen Sie die Ungleichung

   (a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$,

   (b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

12. **(HA)** Überprüfen Sie mit der Regel von l'Hospital die Resultate aus 8. Übung, Aufgaben 1a, 1c, 1g, 1i, 1j und 2a, 2b, 2e, 2f.

13. Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$,

   (c) $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$, (d) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$,

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$ (f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{a^x} \ (n \in \mathbb{N}, a > 1)$.

14. Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

   (a) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], \ x \mapsto \sin x$, (b) **(HA)** $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \ x \mapsto \cos x$,

   (c) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \tan x$, (d) **(HA)** $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \cot x$.

15. Wenden Sie auf die Funktion $f(x) = x^2$ und das Intervall $[a, b]$ den Mittelwertsatz $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$ an und bestimmen Sie ein $\theta \in (0, 1)$.

Zusatz 1:

Die sogenannten Legendre'schen Polynome $P_n(x)$ kann man über die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(x) \text{ mit } f_n(x) = (x^2-1)^n$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $P_n(x)$ nur reelle und einfache Nullstellen besitzt, die sämtlich im Intervall $(-1,1)$ liegen.

Zusatz 2:

Man zeige, dass die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ streng monoton wachsend ist.

---

10. Hausaufgabe

1. Zeigen Sie die Ungleichung $\quad \frac{2}{3} \le \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2$

   (a) mit Differentialrechnung, (b) ohne Differentialrechnung.

2. Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangs- und Beobachtungspunkt (des Lichtstromes) ab. Wo befindet sich der dunkelste Punkt zwischen zwei 10 m voneinander entfernten punktförmigen Lichtquellen, falls eine viermal so stark wie die andere ist?

3. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe 9 für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} & : \; x \neq 1 \\ 0 & : \; x = 1 \end{cases}, \qquad \textbf{(Z)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \in (0,a] \\ \sqrt{\frac{x^3}{x-a}} & : \; \text{sonst} \end{cases} \qquad (a>0)\,.$$

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 10. Übung.