Analysis I

9. Übung – Semesterabschlussübung

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir benötigen folgende Begriffe und Bezeichnungen:

- offene ε-Umgebung von $a \in A$
- *Häufungspunkt* (*HP*) von A, A' Menge aller HP von A
- *innerer Punkt* von A, A^0 Menge aller inneren Punkte von A
- *Abschließung* $\overline{A}$ von $A : \overline{A} = A \cup A'$
- A heißt *offen*, wenn $A = A^0$.
- A heißt *abgeschlossen*, wenn $A' \subset A$ (d.h. $\overline{A} = A$).
- A heißt *beschränkt*, wenn $\exists r \in \mathbb{R} : A \subset U_r(0) = (-r, r)$.
- ($x_0 \in A$ heißt *isolierter Punkt*, wenn $x_0 \notin A'$.)
- (A heißt *perfekt*, wenn $A = A'$.)
- (Menge $\partial A := \overline{A} \setminus A^0$ heißt *Rand* von A.)

1. Finden Sie $A', \overline{A}, A^0$, (∂A) folgender Mengen $A \subset \mathbb{R}$

   (a) $A = \mathbb{N}$ (b) $A = [a, b)$ (c) $A = [a, b]$
   (d) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (e) $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ (f) $A = \mathbb{Q}$

2. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, offen, beschränkt, (perfekt) sind:

   (a) $A = \mathbb{N}$ (b) $A = \{\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $A = (0, 1]$ (d) $A = [0, 1]$ (e) $A = [0, 1] \cup \{2\}$

3. Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A_k \subset \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   (b) Gilt auch $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k$?

   (c) Gilt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

Zusatz 1: Zeigen Sie, dass jede nichtleere, perfekte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

Zusatz 2: Wir definieren $E_0 = [0, 1], E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, usw., so dass $E_n, n \in \mathbb{N}$, aus genau 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n} besteht. Man nennt $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ das **Cantorsche Diskontinuum** oder auch einfach nur **Cantor-Menge**. Zeigen Sie, dass D nichtleer, beschränkt, abgeschlossen, perfekt und überabzählbar ist, aber kein Intervall positiver Länge enthält.

Zusatz 3: Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Zahlen aus $[0, 1]$, bei denen in irgendeiner Dezimalbruchdarstellung die Ziffer 7 nicht vorkommt, perfekt ist.