Analysis I

8. Übung – Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls (ohne Benutzung der Regel von l'Hospital):

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{2}{x+1}+3}{5+\frac{1}{x^2-1}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\dfrac{1}{x}$, (f) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$, (h) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x(x+1)}-x)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$, (j) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

2. Verwenden Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ zur Berechnung folgender Grenzwerte (ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$,

(c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$.

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt 1^∞:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{\cot x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ $(a\in\mathbb{R})$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\cot x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$,

(e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, (f) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$,

(g) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (h) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (1-ax^2)^{\frac{1}{x^2}}$ $(a\in\mathbb{R})$.

4. Bestimmen Sie die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ für

(a) $f(x) = \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\tan 2x}$ $a=\dfrac{\pi}{4}$,

(b) **(HA)** $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x}$, $a=0$,

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $a=0,\ a=1$,

(d) **(HA)** $f(x) = |x|-x$, $a=0$,

(e) **(HA)** $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $a=1,\ a=0$.

5. Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in $x = a$, nach der $\varepsilon-\delta$-Definition:

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}, \qquad a \in (0,1),$

(b) **(HA)** $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^2, \qquad a \in [-1,1].$

6. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit über dem Intervall I. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases} \qquad I = (-1,1) \text{ bzw. } I = (0,\infty),$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0, \end{cases} \qquad I = \mathbb{R},$

(c) $f(x) = \ln x, \qquad I = (0,\infty)$

(d) $f(x) = x \sin x, \qquad I = (0,\infty)$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2^x & : x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2^x} & : x < 0, \end{cases} \qquad I = [-1,1],$

(f) **(HA)** $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}, \qquad I = (-1,1)$

(g) **(HA)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}, \qquad I = (0,1)$

(h) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases} \qquad I = \mathbb{R} \text{ bzw. } I = (0,\infty).$

7. Gelten folgende Beziehungen bei $x \to x_0$:

(a) $\sin x = O(x \cos x), \quad x_0 = 0$

(b) **(HA)** $x = O(e^x), \quad x_0 = \infty,$

(c) **(HA)** $e^x = O(1), \quad x_0 = 0$

(d) **(HA)** $x^5 = o(x^4), \quad x_0 = \infty,$

(e) **(HA)** $e^x = 1 + O(x^2), \quad x_0 = 0$

(f) $x \cos x = x + o(x^2), \quad x_0 = 0.$

8. Zeigen Sie, dass $\sin x \simeq 2x + x \cos \dfrac{1}{x}$ für $x \to 0$ gilt!

9. Es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass F mindestens einen Fixpunkt in $[a,b]$ hat, d.h. es gibt ein $x_F \in [a,b]$ mit $F(x_F) = x_F$.

10. Jede stetige Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$ eines Kreises $K \subset \mathbb{R}^2$ führt ein gewisses Paar diametral gelegener Punkte in den gleichen Punkt über.

11. Gegeben sei ein beliebiges, beschränktes ebenes Gebiet G mit Flächeninhalt F.

(a) Zeigen Sie, dass eine Gerade existiert, die G in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

(Z) Zeigen Sie, dass es zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden gibt, die G in vier flächengleiche Teile zerlegt.

8. Hausaufgabe

1. Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung von x_0 definiert, wobei

   (a) f stetig in x_0, g unstetig in x_0,

   (b) f und g unstetig in x_0

   seien sollen! Welche Aussage kann man über die Stetigkeit der Summe bzw. des Produktes der Funktionen von f und g,

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

   machen?

2. Die Funktion $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

   $$f(x) = \frac{3x-1}{x-1}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f über $(1, \infty)$ streng monoton fallend ist!

   (b) Wie verhält sich die Funktion f für $x \to \infty$?

   (c) Bestimmen Sie das Bild im $f = f(D)$, $D = (1, \infty)$.

   (d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion

   $$f^{-1} : f(D) \to (1, \infty).$$

   (e) Sei $x_0 = 2$. Bestimmen Sie für $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ so, dass gilt

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \qquad (*)$$

   (f) Geben Sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und $x_0 = 2$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ an, so dass $(*)$ erfüllt ist.

3. Besitzt die Gleichung $2^x = 4x$ außer bei $x_0 = 4$ noch weitere Lösungen?

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 8. Übung.