Analysis I

5. Übung – Komplexe Zahlen

---

1. Skizzieren Sie in der Gauschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \frac{1}{\bar{z}}$, (b) $\mathrm{Re}\,(z^2) = 1$, (c) $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = c$, (d) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$,
   (e) $2 < |z| < 4$, (f) $|z - z_0| = |z - z_1|$, (g) $|z+3| + |z-3| \leq 10$,

   wobei $c \in \mathbb{R}$ und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

2. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3 = -1$, (b) $z^4 + 1 = 0$, (c) $z^3 + 2 = 2\mathbf{i}$, (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$,
   (e) $z^2 = -3 - 4\mathbf{i}$, (f) $z^4 - 2\mathbf{i}z^2 + 2\mathbf{i} = 1$, (g) $z^2 + 4\mathbf{i}z + 5 = 0$, (h) $|z| - z = 1 + 2\mathbf{i}$.

   Überprüfen Sie für die Aufgaben (d), (e) und (h) ihre Ergebnisse!

3. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

   $$2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

   gilt.

4. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

   (a) $z^4 + 1$, (b) $z^3 + 1$, (c) $z^4 - 16$.

5. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung

   $$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

6. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung gilt:

   $$\left(\frac{1 + \mathbf{i}\tan\alpha}{1 - \mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \frac{1 + \mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1 - \mathbf{i}\tan(n\alpha)}\,.$$

7. Es seien $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.

8. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \log_2 3 + \mathbf{i}\log_2 6$ irrational?

(Z) Lösen Sie die Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin\frac{2\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$.

5. Hausaufgabe

---

1. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \overline{z}$, (b) $z = \mathbf{i}\overline{z}$, (c) $\mathrm{Im}\,(z^2) = 1$, (d) $0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 2\pi$ und $|\mathrm{Re}\, z| < 1$,
   (e) $|z| < 1 + \mathrm{Re}\, z$.

2. Sei $z = \dfrac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

3. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^5 = 1$, (b) $z^3 - \mathbf{i} = 0$, (c) $z^6 = 64$, (d) $\overline{z}^3 = -8$,
   (e) $\mathbf{i}z^2 - 2z - \mathbf{i} + 1 = 0$, (f) $(z - 3\mathbf{i})^6 + 64 = 0$, (g) $\overline{z} = z^3$, (h) $z^2 + 4\mathbf{i}z = 5$.

4. Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

   $$z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\mathbf{i}$$

   irrationale Zahlen sind. (Verwenden Sie, dass $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ irrational sind.)

5. Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ $(n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R})$ mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.