Analysis I

4. Übung – Mächtigkeit von Mengen

---

1. Man zeige: Sind A überabzählbar und $B \subset A$ höchstens abzählbar, so ist $A \setminus B$ überabzählbar.

2. Sind folgende Mengen abzählbar
   (a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m},\ m, n \in \mathbb{N}\}$ (b) Menge der Primzahlen,
   (c) die Menge aller komplexen Lösungen von Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$,
   (d) die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$,
   (Z) die Menge der algebraischen Zahlen.

3. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an !
   (a) $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$, (b) $(-\infty, \infty)$, $(0, 1)$, (c) $[0, 1]$, $(0, 1]$.

4. Gilt $[0, 1) \times [0, 1) \sim [0, 1)$? (Begründung)

5. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnumerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
   (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
   (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
   (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
   (d) Derartige Hotels stehen auf allen Sternen. Aufgrund einer Havarie im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
   (e) Der Hotelchef wird vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnummerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?

6. Es seien M eine beliebige nichtleere Menge und $P(M)$ die Potenzmenge von M. Gibt es eine Bijektion zwischen M und $P(M)$?

7. Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann unendlich ist, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist.

Zusatz: Die Mengen A, B aus einem Mengensystem $\mathcal{M}$ haben die Kardinalzahlen a, b. Folgt aus $a \leq b$ und $b \leq a$ die Gleichmächtigkeit von A und B?

Bitte wenden!

4. Hausaufgabe

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : a < q < b\}$ abzählbar ist.

2. Sind folgende Mengen abzählbar

   (a) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, (c) die Menge der irrationalen Zahlen, (d) $(0,1) \subset \mathbb{R}$,

   (e) Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ wobei $a, b \in \mathbb{Q}$,

   (f) Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ wobei $a \in \{0, 1\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

3. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an !

   (a) $[0,1)$, $(0,1]$, (b) $(0,1)$, $[0,2]$, (c) $[0,1]$, $(-\infty,\infty)$.

4. Seien A, B Mengen. Zeigen Sie: Aus $A \sim C$ und $B \sim D$ folgt $A \times B \sim C \times D$. ($A \sim B$ bedeutet A gleichmächtig zu B.)
   Hinweis: Konstruieren Sie eine Bijektion!