Analysis I

1. Übung – Wiederholung

---

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
   (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (e) $||x| - |y|| \leq |x - y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (f) **(HA)** $||y - x| - |z - y|| \leq |x - z| \;\; \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Sei $a \geq 0$ fixiert und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x| \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$ gilt.
3. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?
4. Veranschaulichen Sie in der xy-Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, **(HA)** (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.
5. Verwenden Sie die Beziehungen
   $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1\,,$$
   und
   $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$
   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:
   (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$,
   (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,
   (c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$,
   (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
   (e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
   (f) **(HA)** $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.
6. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:
   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
   (b) **(HA)** $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
   (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fixiert),
   (d) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

7. Man löse folgende Ungleichungen:

(a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,

(c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

1. Hausaufgabe

---

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

   (a) $\pm x \leq |x|$, (b) $|x| = |-x|$.

2. Lösen sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung!

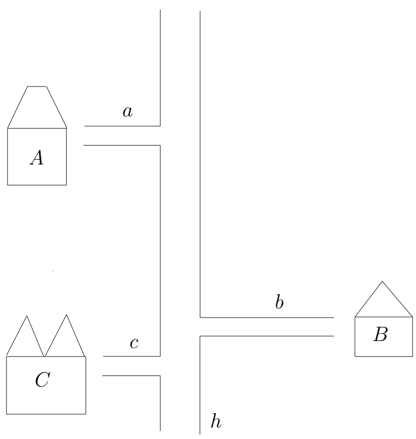
3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

   (a) $\dfrac{\sqrt[n]{x^{2n-3}} \cdot (\sqrt[n]{x})^{n+7}}{\sqrt[n]{x^4}} = x^3\,,\ n \in \mathbb{N},$

   (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}}\,,\ a > 0,$

   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

4. Ein Dorf besteht aus nur drei Häusern A, B, C mit jeweils gleich vielen Bewohnern, die über die Wege a, b, c mit der Hauptstraße h verbunden sind (siehe Skizze). Das Dorf soll eine Bushaltestelle H für den entlang der Hauptstraße h verkehrenden Linienbus erhalten. Wohin würden Sie die Haltestelle H bauen, wenn die Dorfbewohner im Mittel einen möglichst kurzen Weg zur Haltestelle haben sollen?



Zusatz: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1$, (b) $\sin x + \cos x = 1$,

(c) $\lg(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x + \frac{1}{4}\lg 4}$, (d) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1$.