Mathematik für Informatiker

8. Übung. Lineare Gleichungssysteme (Gauß'scher Algorithmus)

1. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$, wenn A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

d)
$$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ:

a)
$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ \lambda x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3z &= \lambda \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

(bei e) und f) Aufgabenstellung wie in Aufgabe 2.)

g)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 &= 8 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

6. Hausaufgabe:

- Aufgaben 1e), 1h), 1i)
- Aufgaben 3d), 3g).