Mathematik für Informatiker

6. Übung – Vektorräume

---

1. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass für das Spatprodukt $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ gilt.

2. Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Geben Sie die Dimension sowie eine Basis von $S := \text{lin}\{\vec{v}_i\}_{i=1}^3$ an:

   a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

   b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

   c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

3. Sei $\mathcal{P}_n$ der Raum aller (reellen) Polynome vom Grade $\leq n$

   a) Geben Sie einen (linearen) Isomorphismus zwischen $\mathcal{P}_n$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ an.

   b) Ist der Operator $A : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$, definiert durch $Ap = p(0)$, ein lineares Funktional ?

   c) Bilden die geraden Polynome G_n einen linearen Teilraum von $\mathcal{P}_n$?

   Zusatz: Geben Sie eine Darstellung des Polynoms $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{3} t^i$ bezüglich der Basis $\{(t-1)^i\}_{i=0}^3$ an.

4. Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = e_1 + 2e_2 - e_3$ (wobei $\{e_i\}_{i=1}^3$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet).

   a) Zeigen Sie, dass das System $\{e_1, e_2, e\}$ mit $e = (0, 1, 1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, und geben Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ in dieser Basis an.

   b) Beschreiben Sie alle Vektoren e, die das Vektorsystem $\{e_1, e_2\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

5. Beschreiben Sie die linearen Teilräume V_a, V_b, die von den Vektoren

   a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$

   aufgespannt werden.
   Gilt $\vec{v} \in V_a$? Wenn ja, geben Sie seine Koordinaten bzgl. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ an.

6. Bestimmen Sie für den linearen Operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Matrixdarstellung
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$
alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die
a) $\ker A$ nichttrivial
b) $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^2$
ist.

7. Sei $A : V_1 \to V_2$ ein linearer Operator.
Zeigen Sie, daß $\ker A$ und $\operatorname{im} A$ lineare Teilräume von V_1 bzw. V_2 sind.

8. Man finde eine Basis in $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

9. Es sei $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ Basis eines linearen Vektorraumes V. Sind dann die Vektoren
$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3,\ \vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$
auch Basis von V?

10. Sei $\mathcal{P}_n$ der lineare Raum aus 6. Übung, Aufgabe 3.
a) Geben Sie die Dimension des Unterraumes von $\mathcal{P}_n$ an, der von den Polynomen $p_1(t) = t^3 - t^2 + t, \quad p_2(t) = t^2 - t, \quad p_3(t) = 2t^3 - 1$ aufgespannt wird !
b) Untersuchen Sie, ob folgende Polynome
$p_i(t) = t^i - t^{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots n$
linear unabhängig sind und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathcal{P}_n$!
(Hinweis: Verwenden Sie den Isomorphismus aus 6. Übung Aufgabe 3a)

Zusatz 1: Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß
a) $(1 + \alpha, 2), (1, 2 + \alpha)$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ ist.
b) $(\alpha^2, 4, 9), (\alpha, 2, 3), (1, 1, 1)$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist.

Zusatz 2: Man bestimme $\ker A$ und $\operatorname{im} A$ für folgende Operatoren:
a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ A(x, y) = (x, 0)$ b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ A(x, y) = (-y, x)$
c) $A : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n;\ Af = f'$ d) $A : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^1;\ Af = f(0)$

Zusatz 3: Man untersuche, ob die folgenden Abbildungen linear sind.
a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ Ax = a \quad (a \in \mathbb{R}^3 \text{const.})$
b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ Ax = x + a \quad (a \in \mathbb{R}^3 \text{const.})$
c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ Ax = \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}^3 \text{const.})$
d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ A(x_1, x_2) = (x_1^2, 0)$
e) $A : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1};\ Af = f' \quad (f' \text{ Ableitung von } f)$
f) $A : \mathcal{P}_n, \to \mathcal{P}_n;\ (Af)(x) = f(-x)$

4.Hausaufgabe, 2.Teil:

- Aufgabe 2b),
- Aufgabe 7, Beweis von im$A$ ist Teilraum von V_2,
- Aufgabe 10b),
- Zusatz 1,
- Zusatz 3, Aufgaben b) und e)