Mathematik für Informatiker

5. Übung – Vektoren

1. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren des $\mathbb{R}^2$ der Länge 1 und
$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 30^o, \qquad \sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = 60^o$$
(Mit $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ bezeichnen wir den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!)
Zeichne für $\vec{a} = e_1$ den Vektor
$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$
und berechne das Skalarprodukt $< \vec{b}, \vec{c} >$ sowie $||\vec{u}||$.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung:
a) Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbieren sich.
b) Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Zusatz: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

3. Sei $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi]$. Zeigen Sie unter Verwendung des Skalar- bzw. Kreuzproduktes von Vektoren des $\mathbb{R}^2$ die Additionstheoreme
a) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
b) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$.

4. Normieren Sie die Vektoren
$\vec{a} = (1,1,1), \quad \vec{b} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \quad \vec{c} = (1,4,1).$

5. Berechnen Sie die Seitenlängen und die Innenwinkel des Dreiecks mit den Eckpunkten
$$A(4,1) \quad B(13,-11) \quad C(29,1)$$
sowie seinen Flächeninhalt.

6. Seien $\vec{m}, \vec{n}$ Vektoren der Länge 1 und $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 30^o$.
Berechnen Sie $< \vec{m} + \vec{n}, \vec{m} + \vec{n} >$.

7. Gibt es einen Vektor des $\mathbb{R}^3$, der mit den Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ je einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ einschließt ?

8. Bestimmen Sie alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die auf
a) $\vec{a} = (1,1,1)$ b) $\vec{a}$ und $\vec{b} = (0,-1,1)$
senkrecht stehen !

9. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{b} = (1,-2,2)$ auf die Gerade
$$\triangle := \{\lambda(-1,1,0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

10. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten
$$A(0,0,0) \quad B(1,0,0) \quad C(0,1,0) \quad D(0,0,1)$$
(mittels Produkten von Vektoren).

11. Berechnen Sie das Volumen des Spates, der von den Vektoren

    $\vec{a} = (1,1,0), \quad \vec{b} = (-1,1,0), \quad \vec{c} = (0,1,2)$

    aufgespannt wird.

12. Sei $\vec{a} \neq (0,0,0)$ ein fester Vektor des $\mathbb{R}^3$.
    Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ injektiv oder surjektiv sind

    a) $f(\vec{x}) =< \vec{a}, \vec{x} > \vec{x}$
    b) $f(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$.

Zusatz 1: Sei $\mathcal{P}_2^c$ der Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{C}$ (mit komplexen Koeffizienten) vom Grade ≤ 2.
Untersuchen Sie, ob die Abbildung
$f : \mathcal{P}_2^c \to \mathbb{C}^3, \quad f(ax^2 + bx + c) = (a - c, b - c, a + c)$
ein Vektorraum-Isomorphismus ist!

Zusatz 2: Geben Sie alle Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ an, die selbst wieder einen Vektorraum bilden!

4. Hausaufgabe, 1. Teil

- Aufgabe 2b),
- Aufgabe 3b),
- Aufgabe 5,
- Aufgabe 11,
- Zusatzaufgabe 2.