Mathematik für Informatiker

4. Übung – Zahlbereiche

1. Seien x, y reelle Zahlen. Zeigen Sie

   a) $\mid x \mid = \mid -x \mid$ b) $\pm x \leq \mid x \mid$ c) $\mid xy \mid = \mid x \mid\mid y \mid$

   d) Sei $a \geq 0$ fixiert. Dann gilt $\mid x \mid \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$.

   e) $\| x \mid - \mid y \| \leq \mid x + y \mid$ f) $\| y - x \mid - \mid z - y \| \leq \mid x - z \mid$.

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen folgende Ungleichungen

   a) $\mid x - 2 \mid \geq 10$ b) $\mid x + 2 \mid - \mid x \mid > 1$

   c) $\mid x - 1 \mid \mid x - 2 \mid = 2$ d) $\mid x \mid + \mid x + 1 \mid + \mid x - 1 \mid = 3$.

3. Bestimmen Sie von folgenden Mengen reeller Zahlen Supremum und Infimum:

$$M_1 = \left\{\tfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\},$$

$$M_3 = \left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad M_4 = \left\{\tfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

4. Veranschaulichen Sie in der xy–Ebene die Lösungsmenge folgender Ungleichungen
   (a) $|x| + |y| \leq 1$ (b) $|x + y| \leq 1$ (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

5. Entscheiden Sie, welche der Beziehungen aus Aufgabe 1 auch für Beträge komplexer Zahlen gelten!

6. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

   a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$ b) $(1 + \mathbf{i})^3$ c) $(1 + 2\mathbf{i})^6$

   d) $\dfrac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$ e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ f) $\dfrac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$

   g) $\dfrac{a + b\mathbf{i}}{a - b\mathbf{i}}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0))$ h) $\dfrac{(1 + \mathbf{i})^{10}}{(1 - \mathbf{i})^8}$

   i) $\dfrac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{(1 - \mathbf{i})^5 - 1}{(1 + \mathbf{i})^5 + 1}$ k) $\mathbf{i}^k (k \in \mathbb{Z})$

7. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar

$$z_1 = \cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi, \qquad z_2 = \frac{\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi}{z_1},$$
$$z_3 = (1 + \mathbf{i})^3, \qquad z_4 = -1,$$
$$z_5 = 2 - 2\mathbf{i}, \qquad z_6 = -\tfrac{1}{2} + \mathbf{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

   (**Zusatz:** $z = \sin\alpha + \mathbf{i}(1 - \cos\alpha)$).

8. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene alle komplexen Zahlen mit der Eigenschaft

   $a)$ $\mid z - 4\mathbf{i} \mid \geq 2$ $b)$ $\mid \frac{1}{z} \mid \leq 3$
   $c)$ $2 < \mid z \mid < 4$ $d)$ $\arg z \leq \frac{\pi}{4}$
   $e)$ $\mid z + 3 \mid + \mid z - 3 \mid \leq 10$ $f)$ $\operatorname{Re} z^2 = a\ (a \in \mathbb{R})$

9. Sei $z = \dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

10. Man berechne

    a) $(1+\mathbf{i})^{10}$ b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$ c) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$ d) $(1+\mathbf{i}a)^n$ $(a \in \mathbb{R})$.

11. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen

    a) $z^3 = -1$
    b) $z^5 = 1$
    c) $z^3 - \mathbf{i} = 0$
    d) $z^3 + 2 = 2\mathbf{i}$
    e) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$
    f) $z^6 = 64$
    g) $z^4 - 2\mathbf{i}z^2 + 2\mathbf{i} = 1$
    h) $\mathbf{i}z^2 - 2z - \mathbf{i} + 1 = 0$

12. Es sei $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}(k = 0, 1, \ldots, n)$, und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(z)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}_0$ eine Nullstelle von $p(z)$ ist.

13. Zeigen Sie, dass $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \dfrac{1+\mathbf{i}\tan n\alpha}{1-\mathbf{i}\tan n\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

14. Stellen Sie das Polynom $p(z) = z^4 + 1$ als Produkt zweier quadratischer Polynome mit reellen Koeffizienten dar sowie als Produkt von Linearfaktoren!

Zusatz 1a): Man berechne die Summe aller n Lösungen der Gleichung $x^n = 1$.
b) Man zeige, dass diese Lösungen eine (endliche) Gruppe (bzgl. der Multiplikation) bilden.

Zusatz 2: Lösen Sie die Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Geben Sie die Lösung sowohl mittels trigonometrischer Funktionen als auch mit Hilfe von Wurzelausdrücken an. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin\frac{2\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$.

3. Hausaufgabe

- Aufgaben 1b), 1f),
- Aufgabe 2d),
- Aufgabe 4c),
- Aufgaben 6c), 6f), 6j),
- Aufgabe 7: z_4 und z_6
- Aufgaben 8c), 8d),
- Aufgabe 10c),
- Aufgaben 11b), 11d), 11h),
- Aufgabe 14.

Abgabe: voraussichtlich am 11. und 12. Dezember in der Übung.